

# Aproximación de superficies para el diseño de envolventes arquitectónicas

## Surface approach for design architectural envelopes

Raúl Galvez Tirado\*  
José Algeciras Rodríguez\*\*

### Resumen:

El presente trabajo consiste en la definición de un método de aproximación de superficies mediante mallas, para el diseño de envolventes arquitectónicas. Dichas mallas, definirán estructuras tipo gridshell, membranas definidas por estructuras de barras, normalmente de una capa y cuya cubierta se defina mediante caras planas o elementos continuos.

Los métodos de aproximación a revisarse consisten en optimizaciones de triangulaciones predefinidas sobre la superficie, dicha optimización se realizará por cuestiones estéticas y constructivas. Posteriormente, dichas triangulaciones servirán para obtener una malla poligonal según diferentes diseños de patrones poligonales, que en el ámbito de este trabajo, consistirán en patrones hexagonales.

Los métodos propuestos en esta investigación constituyen una herramienta para el diseño de aproximaciones que procura establecer una relación directa entre diseño y fabricación. La finalidad, por tanto, no es otra que la de su aplicación en la definición de estructuras en envolventes arquitectónicas. Aunque los modelos sobre los que se ha trabajado responden, al menos conceptualmente, a la tipología constructiva de gridshell, los sistemas descritos son aplicables a cualquier tipo de estructura que finalmente vaya a ser construida mediante barras y/o paneles. Aunque la motivación principal de este trabajo consistía en trabajar sobre superficies de forma libre, dado el sentido generalizador de los métodos descritos, serían aplicables a cualquier tipo de forma.

**Palabras clave:** Paramétrico, discretizar, teselaciones, retícula estructural, empaquetado de círculos, secuencia de comandos, patrón, triangulaciones.

\* Mag. Arq. Facultad de Ingeniería, Escuela de Arquitectura, Univ. Católica Santo Toribio de Mogrovejo, E-mail: raulgalveztirado@gmail.com

\*\* Mag. Arq. Escuela Técnica Superior de Arquitectura Univ. de Sevilla, E-mail: josealgeciras@gmail.com.

### Abstract:

This paper involves the definition of a method of surface approximation by meshes. These meshes are defining grid shells, structures usually constructed of simple-layer lattice to define their closure. The assembly of the lattice can be set of planar or curved faces or it can be enveloped by a continuous membrane.

The methods of approximation consist of the optimization of predefined triangulation over the surface, which will be very use full or aesthetic and fabrication purposes. After wards, these optimized triangulations will be used in order to get a polygonal mesh according to several predesigned patterns that, in this research, consist of an hexagonal pattern.

The methods used in this research should be taken as a tool for surface approximation design and as way to established a strong relationship between design and fabrication. Therefore, the purpose of this research is the applications of this tools in structural design for architectural envelopes. Although the referenced models in this research are what we know as grid shells, the methods described can be used to design a wide range of structural types made by the assembly of flat panels and a structural lattice. In the same way, this methods can be applied generally to any kind of shape not only to free-form structures.

**Keywords:** Parametric, discretize, tessellations, gridshells, circlepacking, scripting, pattern, triangulations.

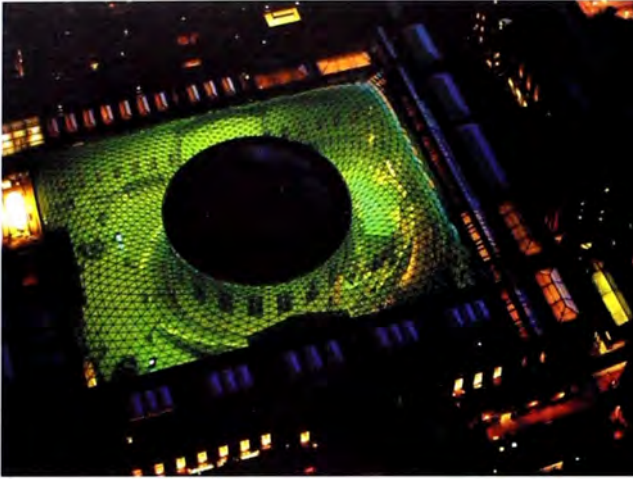


Fig. 1. Cubierta del patio principal del Museo Británico de Londres, Foster & Partners, 2000.

Fuente: <http://goo.gl/G8Hkg>



Fig. 2. Interior del Pabellón de Cristal para la Deutscher Werkbund de Colonia, Bruno Taut, 1914.

Fuente: <http://goo.gl/EKiup>

## 1. Introducción

La tecnología digital es indiferente a la repetición y la modulación. El diseño paramétrico y la producción en masa de productos a medida, suponen un giro en el modelo productivo que afecta a todos los ámbitos del diseño. Frente a las aplicaciones CAD o BIM<sup>(1)</sup>, la utilización de software de script<sup>(2)</sup> hace indispensable para la gestión de los patrones de fabricación de elementos individualizados. La utilización de script en el ámbito de la arquitectura, permite solucionar problemas geométricos en envolventes de edificios, y ofrece una gran flexibilidad para trabajar con formas complejas, favoreciendo el control de los métodos de fabricación desde el inicio del proceso de diseño.

Los actuales sistemas de fabricación de membranas tienen una gran influencia en la forma resultante del objeto, también se deben considerar los costos de su producción. No solo es una cuestión de elección de materiales, sino también, de la forma del módulo base. La utilización de variables sobre los procesos de fabricación requiere cambiar el modo en que se venía diseñando hasta ahora.

El ámbito del trabajo se centra en el estudio de las propiedades geométricas de superficies de forma libre para diseñar un sistema constructivo que haga posible su construcción, estableciendo criterios para mejorar el proceso de diseño.

Los sistemas constructivos utilizados para este tipo de formas producen un determinado efecto estético (Moussavi, 2009) en función de los materiales utilizados. Se pueden construir con sistemas continuos, como en el caso de las membranas de hormigón o las estructuras textiles tensadas, o mediante entramados de barras que se cubrirán sobre todo mediante paneles, aunque también es posible cubrir mediante textiles u otros elementos que se adapten a la forma de la superficie. Los entramados de barras forman teselaciones (Pottmann, 2010) que pueden distribuirse de forma plana en vertical u horizontal y en formas curvas para generar determinadas estructuras espaciales.

Las teselaciones que forman las estructuras de barras son el objeto principal de estudio de la presente investigación. Es evidente la importancia estética de la elección del sistema constructivo así como, de la teselación que supondrá el patrón de diseño de la malla de barras. Si bien nos centraremos en procesos de optimización de triangulaciones, esto servirá a su vez para generar la base dual a partir de la cual poder diseñar un patrón determinado.

Sin embargo, no son sólo ventajas estéticas las que proporcionarán los métodos aquí descritos, sino que también se obtienen ventajas constructivas y estructurales que repercutirán en un diseño más sostenible en términos económicos.



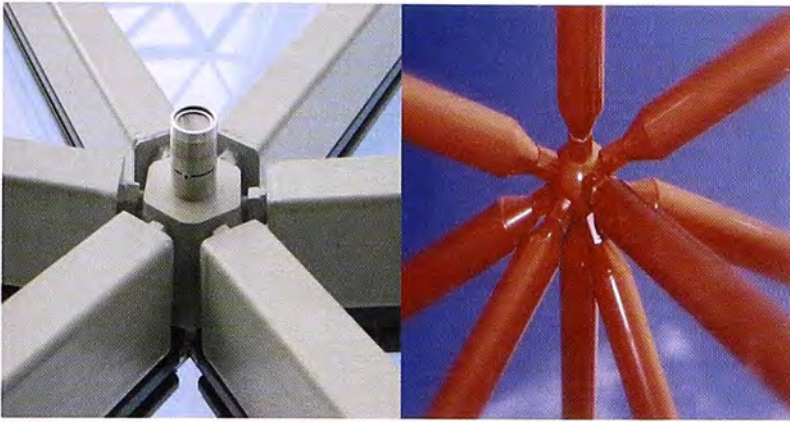


Fig. 3. Fachada del 30 St Mary Axe en Londres, Foster & Partners, 2003.  
Fuente: <http://goo.gl/FwVim> (derecha)

Fig. 4. Transmisión de esfuerzos en estructuras de barras monocapa y espaciales. (arriba).

Los métodos de teselación que compararemos responden a problemas existentes actualmente en el diseño arquitectónico, como la construcción de envolventes complejas y la eficiencia en las soluciones estructurales. No obstante, dichos métodos no sólo son aplicables a la escala global del edificio completo, sino también a la solución de subsistemas dentro del edificio, como fragmentos de fachadas, fachadas completas, o cubiertas. En el ejemplo propuesto (ver Fig. 1) se utilizan estructuras trianguladas para la solución de rehabilitación de la cubierta del edificio.

## 2. Marco teórico

Desde el Pabellón de Cristal para la Deutcher Werkbund en Colonia de Bruno Taut (ver Fig. 2), pasando por el Pabellón multiusos en Mannheim de Frei Otto o el Pabellón de los Estados Unidos en la Exposición de Montreal 67 de Buckminster Fuller, todos fueron los pioneros en el uso de sistemas de teselaciones aplicados a envolventes arquitectónicas, ellos desarrollaron sistemas de panelado plano o curvo, normalmente en vidrio, sobre estructuras de barras o cables de acero, lo que posteriormente permitió aplicar los entramados de barras para la generación de las estructuras conocidas como gridshells.

Los entramados de barras pueden formar teselaciones planas verticales y horizontales o

teselaciones curvadas, de simple o doble curvatura. Las teselaciones horizontales suelen configurar subsistemas de mallas para forjados en los que las cargas se descomponen y se transmiten horizontalmente en las direcciones definidas por la malla. Las verticales forman fachadas que pueden ser muros cortinas o estructurales, configurando las llamadas diagrids (diagonal-grids) que se conforman mediante barras dispuestas diagonalmente conformando cuadriláteros, definiéndose por lo tanto 2 direcciones principales a través de las cuales se transmitirán los esfuerzos que transmiten los forjados a las fachadas hasta la cimentación (ver Fig.3). Aunque las cargas de los forjados se transmiten a través del diagrid de forma vertical, existe también una componente horizontal asociada a cargas de laterales sobre la fachada, que aunque resistidas eminentemente por los forjados, en última instancia son transmitidas al diagrid. Esto implica que los nudos de la malla deben presentar rigidez en la dirección normal a la superficie, al tratarse de estructuras monocapa<sup>(3)</sup>.

Cuando la teselación encierra un volumen por sí misma, siendo por lo tanto autoportante, es cuando podemos hablar puramente de gridshell. El comportamiento estructural es similar al de los anteriores casos, las cargas se descomponen en los nudos y se transmiten a través de las barras hasta la cimentación. La diferencia fundamental radica en la forma de la superficie, donde la curvatura de

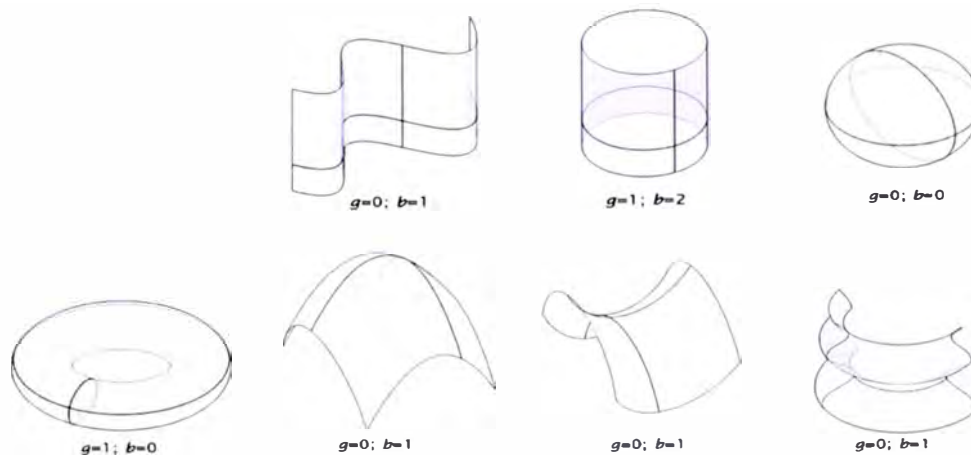


Fig. 5. Tipos de superficies: con curvatura simple las dos primeras y con doble curvatura el resto (b=número de fronteras, g=género topológico).

Fuente: Archivo de los autores.

la superficie adquiere un papel fundamental en la transmisión de los esfuerzos a través de la malla. Las cargas se distribuirán de forma análoga a una bóveda.

Los esfuerzos en el gridshell se descomponen en el nudo en direcciones tangentes a la superficie. Puesto que los gridshells son estructuras espaciales, el nudo deberá soportar además esfuerzos normales a la superficie por lo que, aunque estén articulados en el plano tangente a la superficie deberán ser rígidos en la dirección normal a la superficie para evitar los desplazamientos en dicha dirección. La estructura de doble capa resuelve este problema introduciendo barras en planos perpendiculares a la superficie que soporten dichos esfuerzos y eviten los desplazamientos. Sin embargo esto supone la adición de mayor número de barras a la estructura y la utilización de un nudo más complejo (ver Fig. 4).

Es posible reducir la valencia<sup>(4)</sup> del nudo cuando se generan mallas hexagonales simplificando enormemente su fabricación y ejecución. De esta forma se consigue reducir la repercusión de acero por metro de teselación así como se disminuye la distorsión estética que produce la estructura sobre el diseño de la teselación.

En este momento, cabe introducir el término discretización y aproximación, que se define como el proceso de descomponer un elemento continuo mediante partes discretas cuantificables. De esta

forma las mallas descritas anteriormente constituyen discretizaciones de la superficie a la que se aproximan. Se dice que constituyen una aproximación. De nuevo las mallas monocapa constituyen una aproximación muy precisa de la superficie objeto de modelado, y es por eso que constituyen el principal modelo de experimentación de este trabajo.

#### 4. Metodología

El trabajo se centra en el uso de las teselaciones para la generación de envolventes en arquitectura. Son muy numerosos los ejemplos de uso de teselaciones para la generación de envolventes arquitectónicas. En cualquiera de los casos en los que se observe un panelado de la superficie, se habrá utilizado una teselación mediante polígonos para generarlo.

Para simplificar el estudio de la optimización y la generación de las teselaciones sobre superficies, el ámbito de aplicación en el presente proyecto se ha reducido a las superficies de doble curvatura, generando mallas de una sola capa. Dentro de éste grupo se han estudiado superficies abiertas<sup>(5)</sup> (ver Fig. 5) con 1 ó 2 fronteras y de género topológico<sup>(6)</sup> 0 ó 1 y superficies cerradas de 0 fronteras y género topológico 0 y 1, como es el la esfera y el toro. Este tipo de superficie se considera ideal para aplicar en la mayoría de los casos encontrados actualmente en la práctica arquitectónica, así como para que los resultados sean fácilmente extrapolables a



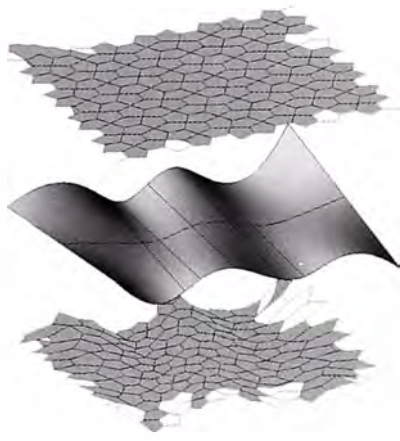


Fig. 6. Mapeado de superficie mediante teselación plana. En este caso, el mapeado consiste además en un remallado. Fuente: Archivo de los autores.

superficies más complejas (con géneros superiores y mayor número de fronteras). Además las mallas de una capa permiten mayor flexibilidad en el diseño de teselaciones sobre superficies.

El proceso de generación de mallas de capas múltiples, resulta ser un tema con complejidad suficiente para comenzar una investigación independiente, que podría complementar los resultados de la presente. La generación de mallas de doble capa se realizaría a través de transformaciones y evoluciones de los resultados aquí presentados.

El presente artículo presenta dos métodos de optimización de mallas trianguladas, basados en técnicas de empaquetado de círculos y en triangulaciones de Delaunay, necesarios para la obtención de mallas teseladas con patrones poligonales planos. El caso de estudio del presente artículo serán las teselaciones basadas en patrones hexagonales. Como veremos, dichas mallas basadas en polígonos diferentes a triángulos presentan varias ventajas frente a las trianguladas, fundamentalmente constructivas y económicas.

## 5. Resultados

A continuación presentamos los diferentes métodos utilizados para la optimización de mallas trianguladas. Las mallas trianguladas, objeto de estudio de esta investigación, se obtienen mediante



Fig. 7. Kunsthaus en Graz, Peter Cook, 2003. Discretización mediante paneles curvos. Fuente: <http://goo.gl/JubBR>

métodos de empaquetado de círculos y deberán cumplir las condiciones de las triangulaciones de Delaunay. Los dos métodos propuestos se basan respectivamente en la ecualización de aristas y en la definición de una distancia mínima entre vértices.

Tras analizar las limitaciones de la mallas trianguladas, propondremos un método de diseño de mallas poligonales con el que obtendremos nuevas cualidades estéticas y mejoras constructivas y económicas.

### 5.1. Aproximación y discretización mediante triangulación.

El primer paso para el diseño de formas libres en la arquitectura es su discretización. La discretización de superficies de forma libre se define como el proceso de descomponer una superficie continua mediante partes discretas cuantificables. Este proceso es necesario para poder realizar evaluaciones numéricas sobre la superficie a través de métodos de cálculo finito. Estas evaluaciones tendrán como objetivocuantificar propiedades físicas, mecánicas o constructivas de la superficie. Además el proceso de discretización supone el diseño del despiece de la envolvente, con toda la carga estética y constructiva que ello conlleva.

La discretización constituye la forma fundamental de parametrización de superficies. La parametrización de la superficie nos permitirá controlar sus

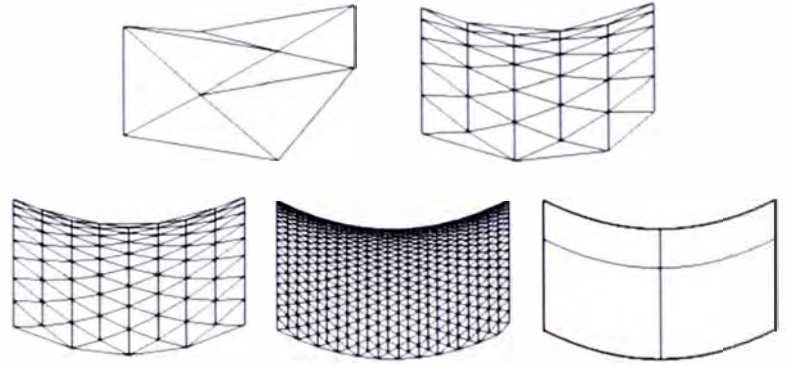
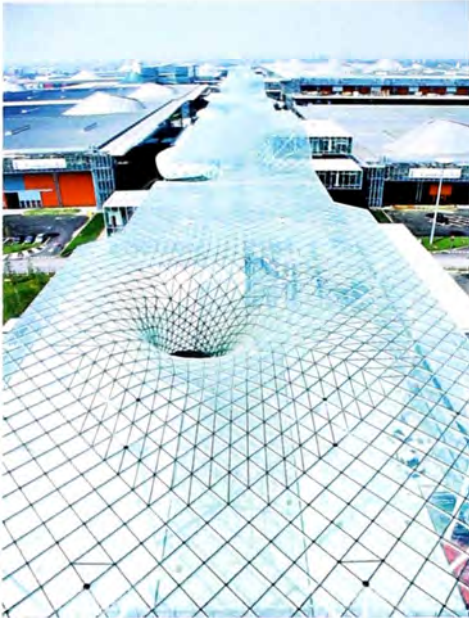


Fig.8 Feria de Milán de Massimiliano Fuksas, 2005. (derecha).

Fuente: <http://goo.gl/vAbEz>

Fig. 9. La variación en el número de caras, aristas y vértices produce la distorsión con la forma original. (arriba).

Fuente: Archivo de los autores.

74

propiedades geométricas y topológicas para poder evaluar la superficie, pero también para generar diferentes efectos estéticos a través del diseño de su despiece (Moussavi 2006). En este trabajo nos centraremos en obtener la aproximación de una superficie de forma libre mediante triangulación y posteriormente mediante una forma evolucionada que será mediante mallas hexagonales.

Las superficies pueden ser discretizadas de diversas maneras. Por ejemplo, haciendo una clasificación muy evidente, un método de discretización dará elementos planos y otro podrá dar elementos curvos o alabeados. En términos de la geometría, hay dos diferencias fundamentales entre estos dos métodos de discretización. Una de ellas se refiere a cuando una superficie se discretiza en elementos planos, dependiendo del tamaño de los elementos individuales, se produce una mayor o menor distorsión en la geometría inicial. La segunda cuando no se produce distorsión formal, la forma original simplemente se divide en segmentos de superficie generando elementos curvos.

Si se quiere discretizar una superficie para ser construida, la forma plana o curva de los elementos será fundamental, puesto que implicará sistemas de fabricación completamente diferentes, y por lo tanto estrategias diferentes de diseño. En este sentido, entendemos que con la tecnología actual resulta mucho más barata la fabricación de elementos planos que la fabricación de elementos curvos, y este dato

será una de las principales motivaciones del presente trabajo.

Dentro de la discretización mediante elementos planos, el sistema más extendido para la definición de envolventes de forma libre es la triangulación. El triángulo es la superficie plana por defecto y cualquier otro polígono requerirá de condiciones muy específicas, en cuanto a la forma de la superficie, para poder cumplir esta condición. Por lo tanto aunque resultase obvia esta afirmación, realmente constituirá un verdadero problema si se pretende panelar superficies de forma libre mediante piezas planas diferentes a triángulos.

### 5.1.1 Discretización de elementos curvos y planos

En este caso es posible la descomposición de la superficie de acuerdo con un esquema arbitrario de panelización. Se puede decir que hay un número infinito de grupos ornamentales (Shubnikov 1974, Quaisser 1994, Moussavi 2006) que pueden utilizarse para discretizar una superficie mediante elementos curvos. Al no producirse distorsión formal de la forma original, es posible una traslación directa del motivo diseñado en el plano a la superficie, lo que se conoce como mapeo de la superficie. Por ello, dependiendo del tipo de superficie, y sobre todo de su curvatura, el patrón 2D sufrirá deformaciones para adaptarse a la forma de la superficie. Este proceso generalmente se conoce como mapeado (ver Fig. 6).



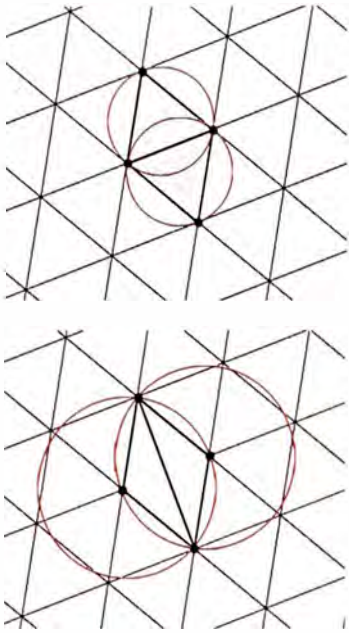
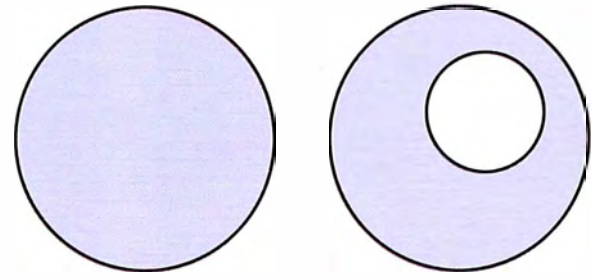


Fig. 10. Formas canónicas. Disco y cilindro topológico respectivamente. (arriba).

Fuente: Archivo de los autores.

Fig. 11. Arista ilegal y 'flipping'. (izquierda)

Fuente: Archivo de los autores.



Los intentos de materializar este tipo de modelo geométrico revelan algunos inconvenientes de este método. Actualmente, la fabricación piezas curvas requiere de moldes que encarecen el proceso, sobre todo teniendo en cuenta que, el patrón geométrico sobre la superficie previsiblemente no generará 2 piezas iguales.

En el caso de la fabricación con vidrio u hormigón se procuraría reducir el número de partes para la construcción de la superficie, sin embargo, precisamente el tamaño de las piezas podría hacer inviable su construcción. Otro problema de la discretización mediante elementos curvos lo constituyen las uniones entre elementos, al utilizar uniones rígidas se transmitirían momentos importantes que dificultarían considerablemente el proceso de cálculo (ver Fig. 7 y 8).

La discretización mediante elementos planos producirá cierta distorsión formal con respecto al original. Dependiendo de la densidad de triángulos sobre la superficie el resultado será más o menos preciso (ver Fig. 9).

La triangulación es el método más conocido de discretización de superficies curvas. El principal inconveniente de utilizar segmentos triangulares planos es la generación de un gran número de aristas y nudos que implican un alto grado de complejidad geométrica.

### 5.1.2 Triangulación

La triangulación que buscamos debe ser una aproximación fiel a la superficie curva original, esto significa que debe existir un margen de tolerancia que hará que la malla se parezca a la superficie. Será de gran importancia que la triangulación pueda ser descompuesta en triángulos equiláteros. Esto significa que la estructura contendrá en su mayoría vértices de valencia 6. Sin embargo esta organización de la malla no responderá únicamente a valores estéticos.

75

Para fabricar la malla al menor costo posible es importante añadir nuevas variables sobre la conservación de la longitud y el ángulo entre caras. Supongamos una malla muy densa que implicará longitudes de barras muy cortas y un mayor número de elementos, pero sobre todo de uniones. En ese caso habrá que rediseñar la malla aplicando criterios de optimización que permitan conservar los aspectos estéticos además de reducir el coste de ejecución. Es necesario encontrar un equilibrio entre el diseño del patrón y el coste de su producción, atendiendo por lo tanto no sólo a factores estéticos si no al gasto de materiales que supondría.

Triangular una superficie consiste en realizar una operación de remallado. La idea básica del remallado consiste en mapear con un patrón determinado un dominio plano, el cual servirá de mapa para la superficie objetivo de mallado. En el

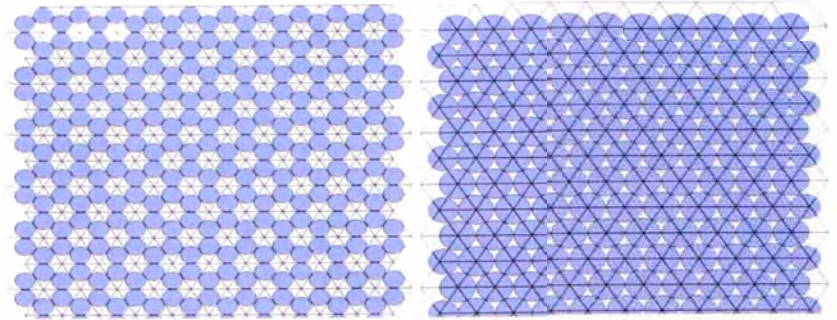
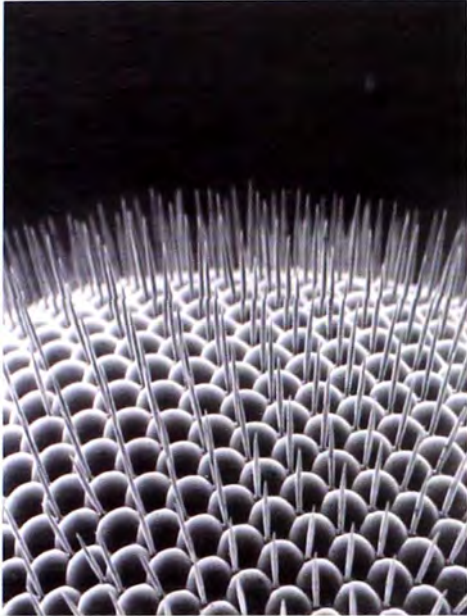


Fig. 12. Ocelo de drosophila. La estructura presenta la compactación de pequeñas unidades (ommatidios), se organizan maximizando la densidad sobre una superficie mínima. En arquitectura no está implícito los casos de superficie mínima, puesto que las motivaciones que generan la forma arquitectónica son diferentes a la naturaleza. (izquierda).

Fuente: <http://goo.gl/ysUZy>

Fig. 13. Empaquetado de círculos en el plano. Conjunto de círculos inscritos y su dual. (arriba).

Fuente: Archivo de los autores.

caso de la triangulación, como su propio nombre indica utilizaremos como mapa una teselación de triángulos equiláteros.

El problema fundamental para asegurar el éxito de la triangulación será encontrar en el plano un mapa con los límites (fronteras) apropiados para aproximarse a la superficie. Esta forma original es lo que se denomina forma canónica (Fig. 10), que además permitirá hacer una clasificación topológica de la superficie a aproximar. Del éxito de la parametrización de la forma canónica dependerá el de la parametrización de la superficie homeomorfa<sup>(7)</sup>.

El problema de la parametrización de superficies ha sido ampliamente estudiado en el ámbito informático de la 1. Se dice que dos superficies son homeomorfas cuando son topológicamente equivalentes, esto es, tras realizar diferentes transformaciones sobre la superficie original es posible obtener la siguiente sin que varíen las propiedades topológicas de la primera. De un modo más formal se puede decir que dos figuras presentan un homeomorfismo si comparten la misma características de Euler:

$$X = F - E + V$$

El objetivo fundamental de la triangulación es generar una aproximación precisa de una superficie, esto es, teniendo en cuenta consideraciones estéticas, estructurales, constructivas y económicas, dada una nube de puntos sobre una superficie, como

unirlos será el primer problema. Normalmente la triangulación de Delaunay constituye el principal método de triangulación dada una nube de puntos, y se basa en un principio de proximidad<sup>(8)</sup>. Sin embargo, dependiendo de la geometría de la superficie, se producirán aristas ilegales<sup>(9)</sup> que será necesario modificar para el correcto diseño de la triangulación (Fig. 11).

El problema por lo tanto será garantizar una correcta conectividad que deberá cumplir la condición de Delaunay para considerar que es válida. El método de circlepacking, como veremos a continuación, genera caras que cumplen esta condición, permite la generación de triangulaciones válidas estableciendo un criterio de conservación del ángulo en las caras de la malla así como de la longitud de las aristas. Posteriormente describiremos dos métodos de generación de circlepacking a través de scripting con Grasshopper3D para Rhino.

## 5.2. Circle-Packing. Método de triangulación mediante empaquetamiento de círculos

Mediante empaquetamiento de círculos es posible optimizar el tamaño de las caras de la triangulación, permitiendo establecer un criterio de conservación de ángulos y longitudes. Este método permite controlar la conectividad de la mallas – la forma en que sus vértices se conectan produciendo caras válidas.

El Circle-Packing (a partir de ahora CP), en la naturaleza, se da de manera frecuente y espontánea



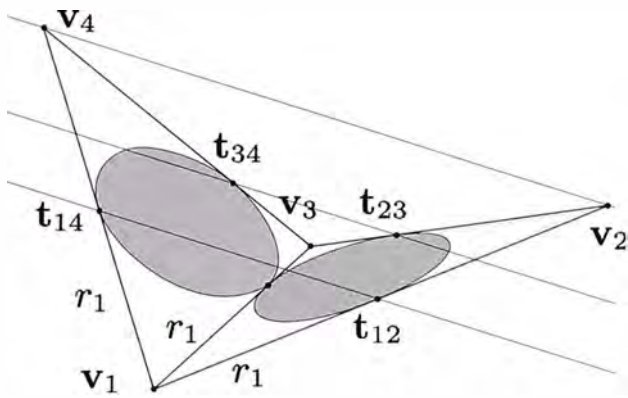


Fig. 14. Círculos inscritos en caras adyacentes.  
Fuente: Archivo de los autores.

como modelo de equilibrio de sistemas naturales minimizando la energía potencial del sistema. El empaquetado de círculos consiste en la agrupación de elementos obteniendo una densidad máxima de empaquetado dado un espacio cerrado, por lo que la posición de los elementos se dispondrán minimizando distancias entre ellos. Es el caso de los sistemas de superficies mínimas de pompas de jabón, o más acorde con el modelo de empaquetado, el proceso de organización de los cantos rodados en el lecho de un río, o incluso la organización de células en los ocelos de insectos (ver Fig. 12).

El teorema de Koebe (1936) demuestra que para toda triangulación de la esfera existe un empaquetado de círculos tal que cada círculo corresponde a un vértice, y dos círculos serán tangentes sí y sólo si son adyacentes. Extrapolaremos este teorema al resto de superficies y se utilizará el empaquetado de círculos como método de optimización para la triangulación de superficies de forma libre, que deberá cumplir la condición de Delaunay.

Una malla CP, es una malla de triángulos cuyos círculos inscritos forman un empaquetamiento óptimo, esto es, la densidad de círculos empaquetados es máxima. cada círculo es tangente a sus círculos vecinos (ver Fig. 13). Al imponer la condición de círculos interiores tangentes, se restringirá la variación de ángulos entre aristas adyacentes, evitando la aparición de aristas ilegales.

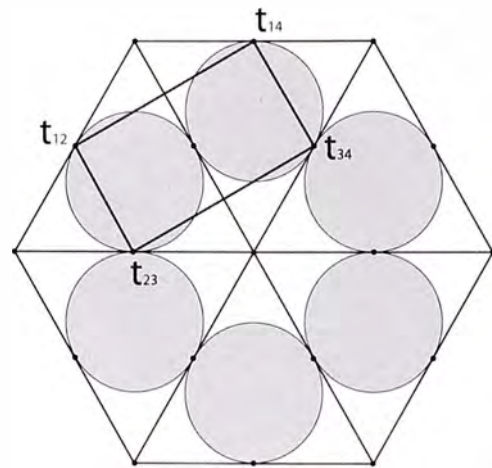


Fig. 15. Ternas de pares de círculos interiores. Los puntos de tangencia t12 , t14 , t34 y t23 son coplanares.  
Fuente: Archivo de los autores.

Del mismo modo, y considerando una malla que se deforma también en la dirección Z en el espacio uclídeo, las esferas con centros en los vértices de una malla también formarán un empaquetamiento óptimo, como se explicará más adelante. Del mismo modo, veremos que la malla hexagonal resultante del empaquetamiento de esferas, que será dual a la triangulación, dará lugar a vértices sin torsiones, con las ventajas estructurales que eso conllevaría.

77

Para comprender como se construye una malla CP, se explicarán algunas relaciones y propiedades geométricas elementales.

Paso uno, considerando un triángulo con vértices  $v_1, v_2, v_3$ , cuyas aristas son tangentes a la circunferencia inscrita en puntos  $t_{12}, t_{23}, t_{13}$  (ver Fig. 14). Las distancias desde los puntos de tangencia hasta cada vértice  $v_i$  se denota por  $r_i$ , por lo que  $r_1 = \|v_1 - t_{12}\| = \|v_1 - t_{13}\|$ . Tomando  $l_{ij}$  como la longitud de cada arista  $l_{ij} = \|v_i - v_j\|$ , se cumple que,

$$l_{ij} = r_i + r_j, \quad 2r_i = l_{ij} + l_{ik} + l_{jk} \quad (1) \quad (\text{Schiftner, 2010})$$

Paso dos, utilizando dos triángulos de una malla CP con vértices  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_1, v_3, v_4$  y una arista común  $v_1 v_3$ . Expresando las longitudes de arista en función de (1) se comprueba que las longitudes de las aristas opuestas en el cuadrilátero formado por ambas caras es igual a:

$$l_{12} + l_{34} = l_{23} + l_{14} \quad (2)$$

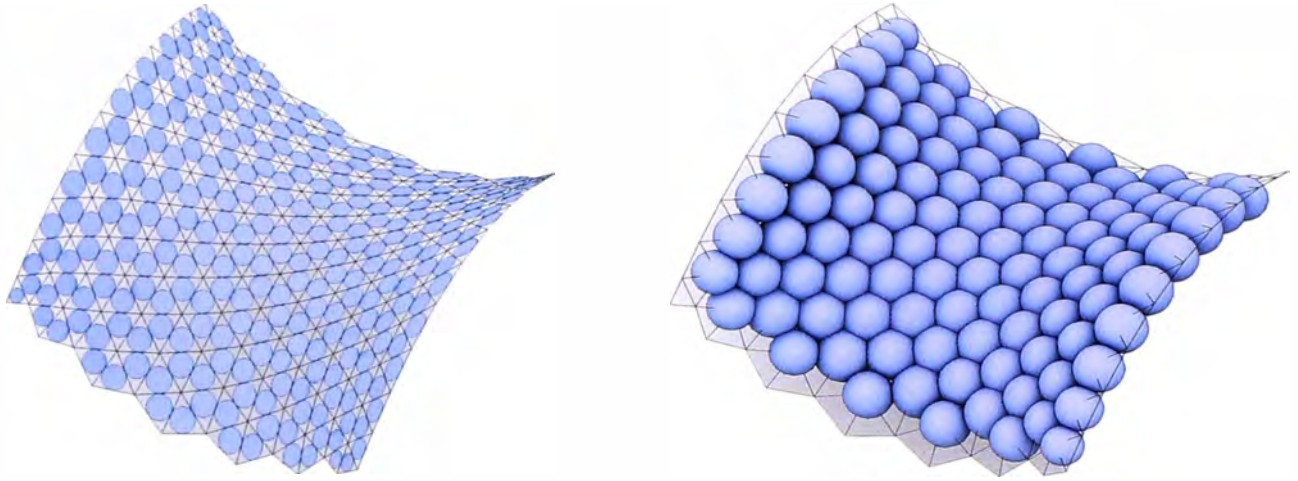


Fig. 16. Malla CP y malla de esferas dual.  
Fuente: Archivo de los autores.

78

De donde también se desprende que si se verifica (2), los dos círculos interiores se encontrarán en un punto común  $t_{13}$ . Para demostrarlo consideremos las ternas formadas por  $r_1, r_4, r_3$  y  $r'_1, r'_2, r'_3$  asociadas a los triángulos  $v_1, v_4, v_3$  y  $v_1, v_2, v_3$ , respectivamente. Además la condición (2), que puede entenderse como  $r'_1 + r'_2 + r_3 + r_4 = r'_2 + r'_3 + r_1 + r_4$ , junto con la igualdad  $r_1 + r_3 = r'_1 + r'_3$  implica que  $r_1 = r'_1$  y que  $r_3 = r'_3$ .

En el plano, un cuadrilátero que cumple (2) poseerá una circunferencia inscrita tangente a sus cuatro lados. Esta afirmación se cumplirá también en el espacio, de donde se deducen algunas conclusiones interesantes que explicamos a continuación.

Considerando el punto  $c$  como intersección de las rectas  $v_2 v_4$  y  $t_{12} t_{14}$ , que podrá estar en el infinito si las rectas son paralelas. Se puede entender que con origen en el punto  $c$ ,  $v_4$  y  $t_{14}$  son proyecciones de  $v_2$  y  $t_{12}$  respectivamente, sobre el triángulo adyacente. Del mismo modo, proyectando una circunferencia inscrita con centro en  $c$  sobre el plano del triángulo opuesto, resultaría en otra circunferencia inscrita. Por tanto la recta  $t_{23} t_{34}$  también pasa por  $c$ , siendo los puntos  $t_{12}, t_{23}, t_{34}$  y  $t_{14}$  coplanarios (ver Fig. 14). Estos puntos también se localizan en la superficie de la esfera común que contiene a las circunferencias interiores y además, se localizan en una circunferencia común.

Consideremos además los triángulos adyacentes al vértice  $v_i$ . En una malla CP, todos los puntos de tangencia en las aristas alrededor de  $v_i$  deben estar a la misma distancia  $r_i$  de  $v_i$ . Por lo tanto,  $r_i$  es un valor asociado a cada vértice de la triangulación. Si tomamos  $r_i$  como radio de una esfera  $S_i$  con centro en  $v_i$ , obtenemos un empaquetamiento de esferas ortogonales a las circunferencias inscritas en cada triángulo tangentes entre sí en  $t_{ij}$  (ver Fig. 15). Podemos decir que el empaquetamiento de esferas es ortogonal al empaquetamiento de círculos interiores.

El empaquetado de círculos interiores, sin embargo, no es un empaquetado real, no se genera densidad máxima y resultan espacios intersticiales entre los círculos. Es importante saber que tampoco es posible el empaquetado de círculos duales (ver Fig. 16), tangentes entre sí cuando el método se aplica a superficies arbitrarias. Esto se explica porque los círculos interiores tangentes entre sí forman pares con ejes de rotación normales a la cara que son coplanarios. Estos pares se agrupan en ternas alrededor de cada vértice, por lo que cada terna de planos definen un punto común que será el centro de una esfera sobre la que se disponen las circunferencias interiores de cada triángulo.

En el caso de ternas de pares de circunferencias definidas sobre un plano, los ejes de rotación serán paralelos. Sólo en este último caso, es posible definir una curva cónica plana sobre el vértice común tangente al resto de vértices de las caras. Esta curva



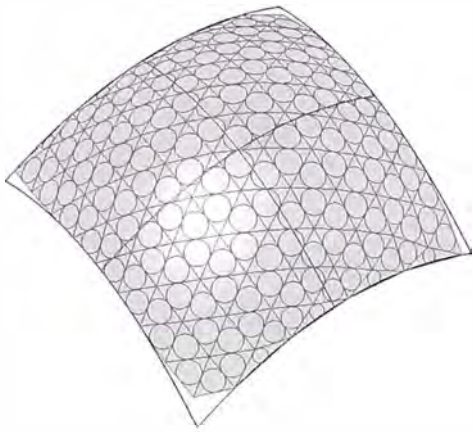


Fig. 17. Mapeo de superficie mediante triangulación. Estado inicial previo a la simulación.

Fuente: Archivo de los autores.

cónica sólo será una circunferencia cuando todas las caras adyacentes al vértice sean iguales. Es por eso que hablaremos de malla dual de esferas y no de círculos cuando nos refiramos a superficies arbitrarias.

La malla generada contendrá caras válidas según la condición de Delaunay garantizada por la condición de tangencia entre los círculos interiores de cada cara.

Es posible realizar la aproximación de la superficie mediante técnicas de simulación. En este caso, se simulará un proceso de auto-ensamblaje (auto-organización) de partículas que interactúan sobre la superficie. Se impondrán restricciones simples que permitirán generar mallas con las propiedades explicadas anteriormente. Más adelante, también se analiza la posibilidad de generar mallas de menor valencia a través de lo que se ha denominado dualidad de tangencia.

### 5.3. Algoritmos de aproximación de superficies

El autoensamblaje (también denominado auto-organización) es el proceso mediante el cual elementos básicos se combinan formando estructuras complejas a través de simples interacciones a nivel local. El auto ensamblaje ocurre de manera espontánea en sistemas naturales como la formación de molécula, aprender cómo funcionan los materiales a nivel molecular puede arrojar algunas pistas sobre cómo

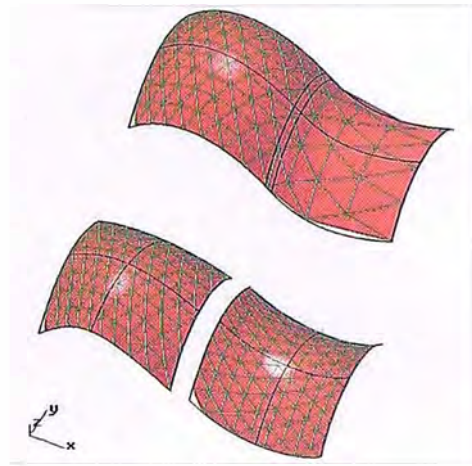


Fig. 18. Deformaciones en el dominio de la superficie producidas por la curvatura. Se muestran los dominios de superficies representados mediante las familias de isolíneas UV.

Fuente: Archivo de los autores.

trabajar con ellos. Aunque lo realmente interesante es como extrapolar su funcionamiento para aplicarlo a escalas macroscópicas. Sin embargo, buscar inspiración en la naturaleza no consiste únicamente en tomar formas de ella y adaptarlas al uso humano, sino de observar los procesos que tienen lugar en ella y aprender como se desarrollan. Básicamente se trata de estudiar como la naturaleza optimiza el uso de los materiales en función de sus propiedades intrínsecas, lo que supone un sistema de reglas que permite realizar diseños óptimos en términos consumo energético y de recursos materiales.

El método de circlepacking ofrece pautas bastante claras para el modelado de los procesos que se explicarán más adelante. En ambos métodos se toma como criterio la conservación del ángulo de los polígonos equiláteros así como se tenderá a igualar las distancias entre vértices. Si atendemos al empaquetado de la malla dual de círculos en el plano, la regla principal que produce el empaquetado es que la distancia entre círculos debe ser mínima para generar la máxima densidad de círculos en un espacio acotado del plano. Como se observó, su traducción en la superficie será la malla dual de esferas.

Los métodos de aproximación que se definen parten de un mapeado inicial mediante una teselación triangular sobre la superficie dada. El primer método consistirá en la optimización de una aproximación predefinida. Producirá un ajuste de distancias y

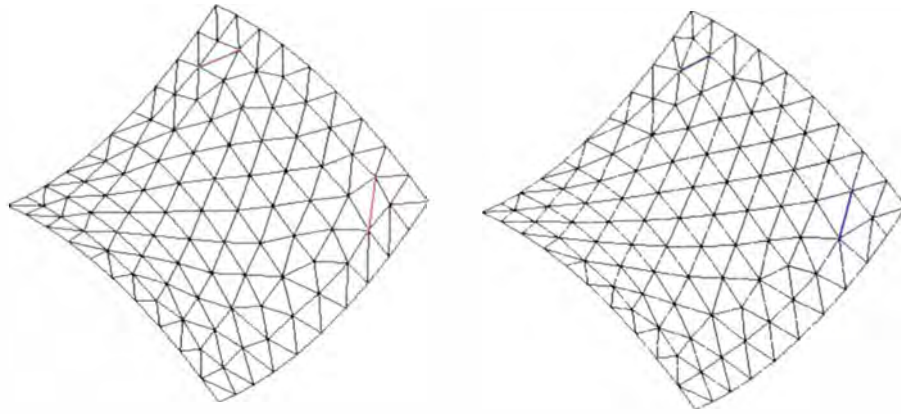


Fig. 19. Vértices irregulares y aristas ilegales asociadas a los mismos. La segunda etapa del algoritmo de optimización no resuelve la conectividad de los vértices pero sí la validez de las aristas, y por tanto de las caras.

Fuente: Archivo de los autores.

ángulos como veremos a continuación. El segundo método parte de una nube de puntos aleatoria para establecer conexiones entre los vértices y generar la malla de aproximación. El algoritmo en este caso lo que generará será una conexión apropiada de dichos puntos teniendo en cuenta los requisitos que debe cumplir la malla CP.

**80** La programación de los algoritmos se ha realizado con Grasshopper3D, plugin libre de Rhino4. Para la programación de la simulación se han utilizado los componentes de Kangaroo programados por David Piker y cedidos a la plataforma de Grasshopper. El componente principal de Kangaroo permite simular procesos de interacción entre partículas dada una determinada geometría y suponiendo un conjunto de fuerzas que actúan sobre las partículas.

A continuación se explicará el funcionamiento de cada algoritmo generado mediante Grasshopper3D para Rhino.

### 5.3.1 Ecuilización de aristas y ángulos

La primera parte del algoritmo consiste en mapear la superficie con una teselación triangular. Para el mapeo se proyectarán los puntos generados en el plano sobre el dominio de la superficie, produciéndose una traslación del sistema de referencia que implicará una reparametrización de la superficie (ver Fig. 17).

Los componentes introducidos introducen restricciones que impondrán la conservación del

ángulo de  $60^\circ$  propio de la teselación de triángulos equiláteros. Se introduce también un componente de ecualización que igualará la longitud de las aristas. Debido a que el efecto que producen estas restricciones suponen una contracción de la malla sobre la superficie, es necesario introducir un componente que simula fuerzas de repulsión, para ajustar los límites de la malla sobre los límites de la superficie. El cuarto componente simplemente restringe los movimientos de las partículas dentro de los límites del dominio 2D de la superficie. Finalmente el algoritmo genera los círculos interiores como verificación del proceso.

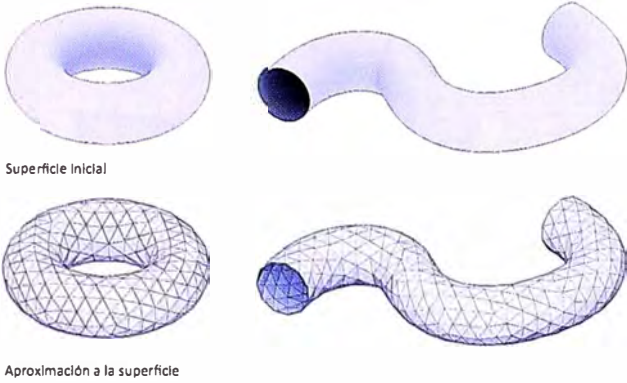
*Animación 1.* La animación presenta el estado inicial de la malla y como evoluciona hasta alcanzar el equilibrio. (Para ver la animación ir al siguiente enlace web <http://goo.gl/hXr3vX>)

El algoritmo descrito sin embargo no es posible aplicarlo a cualquier superficie. Sólo es posible su aplicación en superficies abiertas de género topológico 0. Además las características geométricas de la superficie también influyen en la estabilidad del algoritmo. La variación excesiva de la curvatura de la superficie impedirá el correcto funcionamiento del algoritmo, así como la forma de su frontera, que deberá ser siempre convexa.

La inestabilidad del algoritmo, aparte de por las limitaciones intrínsecas a nivel de programación de los componentes, se debe a que la geometría



#### Método de las distancias mínimas sobre superficies complejas



#### Método de las distancias mínimas sobre superficies complejas

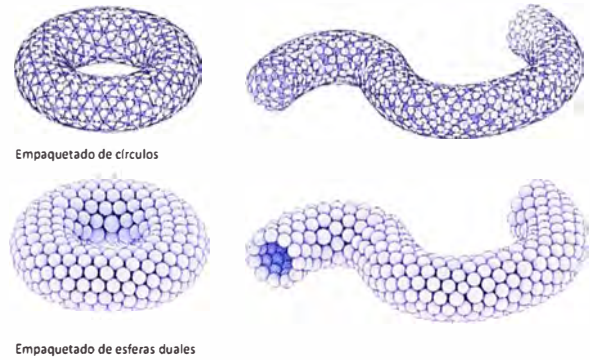


Fig. 20. Aproximación de superficies de geometría y topología compleja.  
Fuente: Archivo de los autores.

generada se define sobre el dominio de la superficie en coordenadas locales. Dicho dominio se deforma por el efecto de la curvatura de la superficie (ver Fig. 18), como también ocurriría si contase con una frontera repleta de entrantes y salientes. Este hecho requiere el mapeo constante del dominio de la superficie mientras transcurre la simulación, lo cual requiere de técnicas de programación más avanzadas.

Al basarse en coordenadas globales, el siguiente método, de distribución de distancias mínimas se adapta a la geometría y a la topología de cualquier superficie, aunque, como veremos en el apartado final de , precisamente en superficies de geometría y topología simple, el presente método resulta más idóneo.

#### 5.3.2 Distribución en función de distancia mínima

En este caso la restricción fundamental que se introduce en la simulación es la introducción, de forma manual de una distancia entre vértices. Al otorgar rigidez a las aristas es posible simular colisiones entre esferas indeformables sobre la superficie, aunque para mejorar el rendimiento del sistema informático se opta por representarlas mediante círculos planos.

El algoritmo está configurado de manera que dada una densidad de vértices de la malla sobre la superficie se ha de introducir una distancia tal que

se compacte la superficie la superficie completa del objeto. Esta será la distancia mínima entre vértices que permite, dada una densidad de puntos, cubrir la máxima superficie. La densidad de la aproximación dependerá por tanto de la cantidad de vértices que se definan así como de la distancia que se introduzca.

*Animación 2.* Las variaciones se producen en función de la distancia impuesta entre vértices. Se observa como los círculos se 'colocan' en la posición óptima. (Para ver la animación ir al siguiente enlace web <http://goo.gl/qcKRrP>)

La facilidad de la geometría para adaptarse al dominio de la superficie, radica en el hecho de que la distancia impuesta entre los vértices de la malla viene definida por valores absolutos no relativos, por lo que no se requiere de una parametrización local para definir la posición de las partículas. Sin embargo, será precisamente esto lo que produzca la aparición de vértices irregulares (ver Fig. 19). La restricción de la longitud de las aristas, asociadas al hecho de que los límites de la superficie definen un espacio 2D cerrado y acotado, restringe también la posición de los puntos sobre la superficie.

Para resolver esto es necesario otorgar cierto grado de deformación a la malla para permitir un reajuste de ángulos y aristas. Será necesario un post-proceso de optimización para suavizar el resultado. Por lo tanto este método siempre deberá llevar asociado

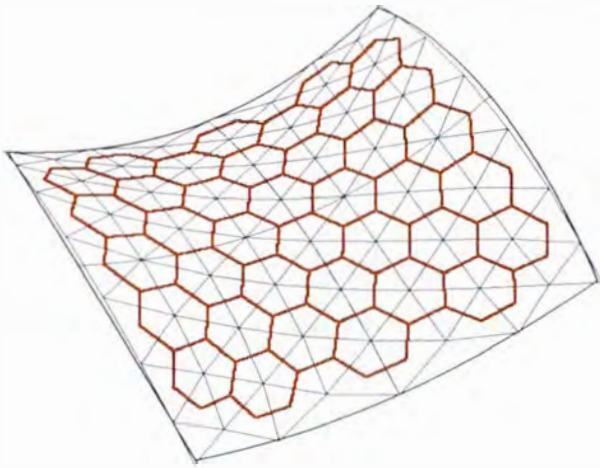


Fig. 21. Malla hexagonal dual a la triangulación.  
Fuente: Archivo de los autores.

el post-proceso de suavizado. Es posible mejorar el suavizado de la malla aumentando la densidad de la malla.

### 5. 3.3 Comparación de los métodos de aproximación

A continuación se presentan los resultados obtenidos al aproximar mallas similares por cada uno de los métodos de aproximación descritos.

En ambos métodos se toma finalmente un criterio de distancia mínima para la organización de las partículas sobre la superficie. En el primer método, la condición de eualización y de conservación del ángulo tenderá a contraer la malla acortando lo máximo posible las aristas. Esta tendencia a la contracción supondrá que los vértices se dispongan a distancias mínimas con respecto a los vértices vecinos. El segundo método el criterio de distancia mínima entre vértices es intrínseco al comportamiento del sistema. Este principio de minimización hará que los vértices, a través de ambos métodos, se alineen sobre líneas geodésicas de la superficie.

El método de eualización produce mallas completamente suavizadas distribuidas de manera óptima sobre la superficie. El segundo método en cambio produce una aproximación algo más irregular, incluso tras el proceso de suavizado la forma no llega a ser suficientemente óptima, sobre todo en términos estéticos. Sin embargo las aproximaciones que aparecen en la Fig. 20 sólo es

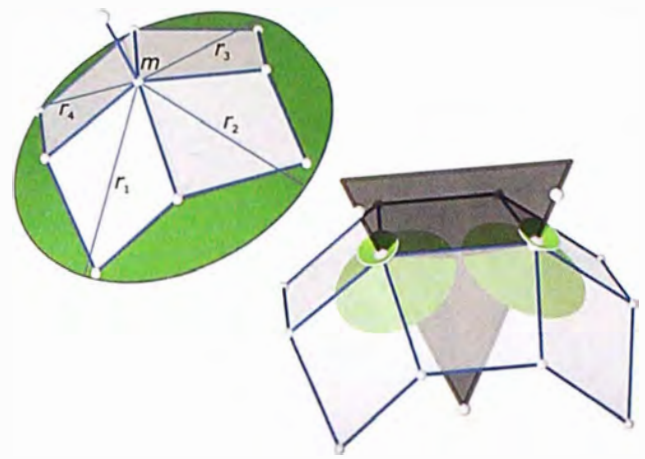


Fig. 22. Familias de curvas conjugadas sobre superficie.  
Fuente: Pottmann, H. & Bentley, D., 2007. Architectural geometry. Exton Pennsylvania: Bentley Institute Press. Pág. 695.

posible obtenerlas mediante el segundo método.

En el ítem siguiente veremos las limitaciones que encontramos en la aplicación tanto de los algoritmos como del propio método de circle packing. Estas limitaciones se deben sobre todo a la complejidad geométrica y topológica de las superficies.

Por otro lado, se describirán las desventajas de las aproximaciones de superficies mediante mallas trianguladas frente a otras compuestas por mallas poligonales que presentarán ventajas tanto constructivas como estéticas.

## 5.4. Limitaciones de las mallas trianguladas

Se describe a continuación las limitaciones de los métodos descritos anteriormente, y se indicarán las posibles desventajas de la utilización de mallas trianguladas en comparación con otras mallas poligonales.

### 5.4.1 Limitaciones geométricas. Vértices irregulares

Se ha descrito anteriormente que el método de eualización presenta grandes limitaciones cuando la curvatura de la superficie o la forma de su frontera produce distorsiones del dominio de la superficie. En el caso del método de distancia no existe realmente una limitación del ámbito de aplicación, más allá de las limitaciones propias del método de programación.

Sin embargo, la naturaleza de la superficie producirá cierta cantidad de vértices irregulares, aquellos de



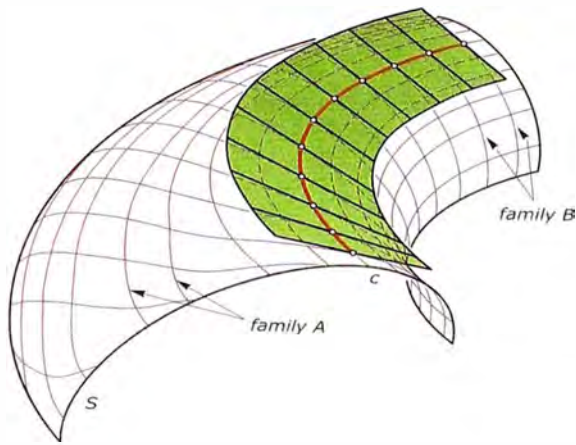


Fig. 23. Vértices de una malla cónica.

Fuente: Pottmann, H. and Bentley, D., 2007. *Architectural geometry*. Exton Pennsylvania: Bentley Institute Press. Pág. 680.

valencia diferente a 6, exceptuando los vértices del borde. Estos vértices irregulares corresponden en la malla dual a pentágonos y heptágonos generalmente. Localizar este tipo de vértices es importante para el diseño óptimo de este tipo de mallas.

El defecto angular es el ángulo que falta para completar un círculo completo al sumar los ángulos adyacentes a un vértice. El defecto total será la suma de los defectos de todos los vértices de la malla. Descartes demuestra que para una esfera, sea cual sea el número de vértices, el defecto total es  $4\pi$ , lo que puede generalizarse a cualquier superficie de  $g=0$  (homeomorfa a la esfera). El teorema de Gauss-Bonnet<sup>(10)</sup> relaciona la curvatura<sup>(11)</sup> de la superficie con la característica de Euler y generaliza las conclusiones de Descartes. Por lo que es posible relacionar el defecto total de una malla con el género topológico.

Por lo tanto el defecto total de la malla se reparte entre todos los defectos angulares de los vértices de la malla. A medida que el defecto angular es menor en cada vértice, los triángulos adyacentes al vértice son más equiláteros (suponiendo 6 triángulos adyacentes a un vértice la suma de todos ellos se acerca a 360). Sin embargo el problema de Thomson y Tammes<sup>(12)</sup> implica que para que la malla absorba el defecto total, deberán disponerse más vértices que permitan repartir el defecto total entre ellos. A menos que existan infinitos vértices sobre la superficie sobre los que repartir el defecto, siempre existirán vértices

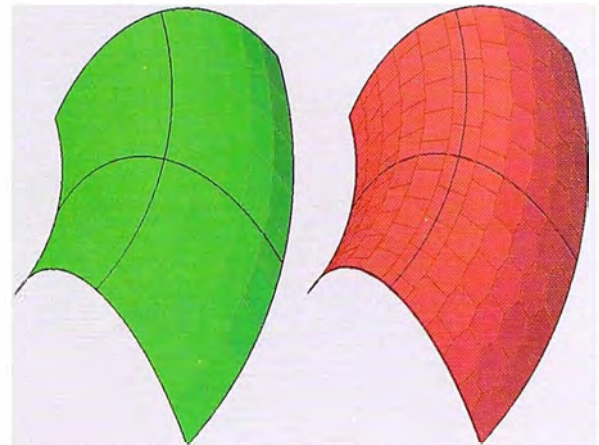


Fig. 24. Malla cónica cuadrangular obtenida a partir de familia de curvas conjugadas en UV sobre superficie de revolución. Isolíneas UV y su discretización para la producción de caras planas.

Fuente: Archivo de los autores.

irregulares que absorberán el defecto restante. Esto implica que los requisitos impuestos al sistema auto-organizativo dependerán de si establecemos prioridades de regularidad geométrica o regularidad conectiva. Cada uno de los métodos propuesto responde a esta cuestión de una de las maneras.

Por lo expuesto se concluye que si todos los triángulos fuesen equiláteros, entonces todos los defectos angulares de cada vértice se concentrarían en vértices irregulares, por lo que aumentaría la irregularidad en términos de conectividad para poder absorber el defecto total - suponiendo triángulos equiláteros perfectos y vértices de valencia 6, el defecto en cada vértice sería 0 por lo que la malla sería plana. Será importante encontrar un equilibrio entre la variación de longitud de las aristas y el número de vértices irregulares.

#### 5.4.2 Limitaciones constructivas

Las mallas trianguladas ofrecen una aproximación muy precisa de cualquier superficie. No obstante, existen algunas razones que hacen que otras soluciones de aproximación parezcan más atractivas:

En cualquier estructura triangulada encontraremos nudos de valencia 6 generalmente, como extensión al dominio de la superficie de la teselación de triángulos equiláteros del plano. Esto implica un alto grado de complejidad frente a otros tipos de mallas con vértices de menor valencia. En el caso de la existencia de vértices irregulares, que habrá

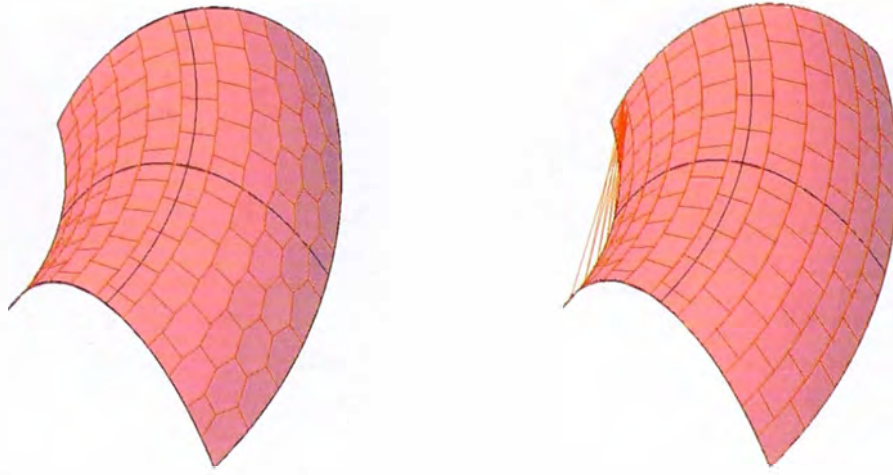


Fig. 25. Disposición en “fábrica de ladrillo” y obtención de la malla hexagonal.  
Fuente: Archivo de los autores.

que evitar, la valencia podrá ser incluso de 7, por lo que se requerirá incluso la modificación de la conectividad de dicho nudo.

84 A parte de casos simples como esferas o planos, no es posible generar mallas equidistantes a mallas trianguladas. Tampoco es posible utilizar mallas triangulares para la construcción de estructuras multicapa de forma libre con el requerimiento básico de que las capas sean paralelas. En el caso de las mallas trianguladas, las de doble capa se diseñan mediante triángulos y hexágonos.

#### 5.4.3 Limitaciones económicas

Suponen una gran repercusión del precio de las uniones en cada metro de malla ejecutada y de la cantidad de barras necesarias para el montaje. La repercusión será menor en mallas cuadrangulares y hexagonales, en cuanto a la simplicidad de su nudo y la menor cantidad de barras para ejecutar un metro cuadrado de malla.

Es importante mencionar que el funcionamiento de las mallas trianguladas está sobradamente probado y garantizado, no sólo como aproximaciones estéticas sino como sistemas constructivos y estructurales. Lo que se propone en el presente trabajo es investigar sobre las posibilidades de otras mallas poligonales para la generación de mallas espaciales. Se trata, de proponer un proceso de form-finding que permita encontrar alternativas a los sistemas descritos.

Los métodos de aproximación desarrollados durante la elaboración de este trabajo, aunque podrían constituir fines en sí mismos, resultan ser además fruto de una búsqueda algo más ambiciosa, la necesidad de lograr una triangulación óptima es crucial para llevar a cabo los procesos que se describen más adelante.

Cualquier teselación del plano lleva asociada una teselación dual, que se obtiene mediante transformaciones lineales de la anterior. Esta característica también se da en el espacio, de tal forma que mapear el dominio de una superficie con una teselación, es posible mapearla con su dual. Por tanto, toda triangulación lleva asociada una malla dual.

La malla dual  $M^*$  (ver Fig. 21) se genera conectando los centroides de las caras que forman  $M$ . El gran inconveniente, y es algo que extenderemos más adelante, es que más allá de la triangulación, cualquier dual asociada no poseerá caras planas, por lo que deberían triangularse para ser fabricables. Sin embargo se comprueba que existen métodos de aproximación para generar mallas duales de caras planas.

Estos métodos requieren de una discretización de la superficie que debe cumplir condiciones geométricas muy específicas. Por ejemplo para el caso de mallas cuadrangulares, será necesario discretizar la superficie a través de familias conjugadas de

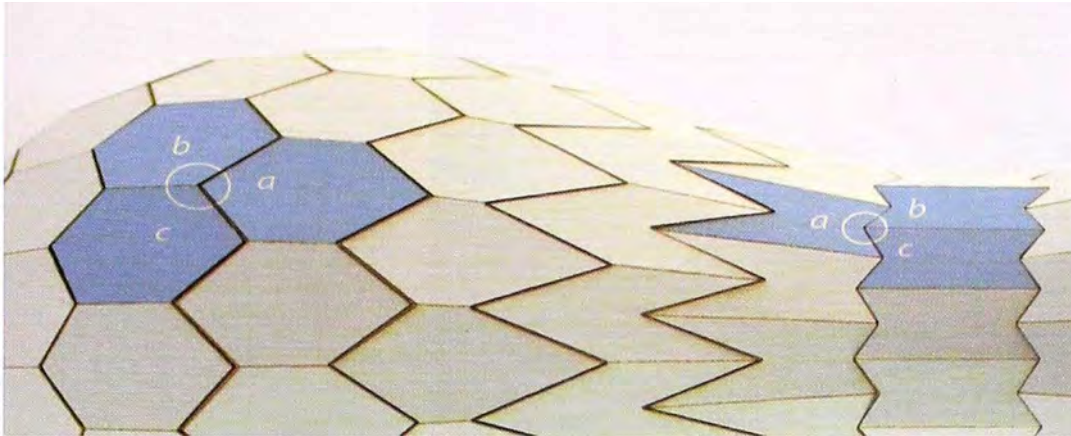


Fig. 26. Ángulos en vértices de la malla.  
Fuente: Archivo de los autores.

curvas, sobre las que trazar una triangulación y forzar la formación cuadriláteros a partir de 2 caras triangulares. Para obtención de la malla hexagonal será necesaria una triangulación que permita trazar planos tangentes a la superficie y que pasen por los vértices de la triangulación. La intersección de dichos planos nos darán los vértices de los hexágonos que serán proyecciones de los vértices de la hexagonal dual.

A continuación se presenta a modo de resumen los métodos de aproximación de superficies investigados hasta el momento y las limitaciones geométricas, constructivas y económicas que estos presentan (ver Cuadro 1).

### 5.5. Aproximación mediante hexágonos

El método de generación de paneles hexagonales planos mediante dualidad de tangencia, tiene la facilidad de producir un despiece de envolventes más baratas y menos complejas constructivamente. Esto se conseguirá reduciendo la cantidad de barras mediante la optimización de la malla, pero también y sobre todo, reduciendo la complejidad del nudo. Para la obtención de este tipo de mallas necesitaremos la base dual que proporciona la triangulación.

Quizás sea la frecuencia con la que aparece formando estructuras en la naturaleza como los micro-exoesqueletos de radiolaria, cuya forma se basa a en las mallas hexagonales (Bach 1990; Spuybroek

2004); o en los panales de abeja; o debido a que es la estructura más estable de moléculas como el fullereno o el grafeno, por lo que resulta tan interesante para los diseñadores la malla hexagonal. Versiones estéticamente equilibradas de éstas pueden obtenerse fácilmente como malla dual a la triangulación CP.

La geometría y efectividad de las mallas cuadrangulares son bien conocidas. Su generación es sencilla, puesto que las aristas de sus caras se obtienen de la discretización de familias de curvas conjugadas<sup>(13)</sup> de la superficie (Fig. 22). Las más evidentes son las que se obtienen al discretizar las isocurvas que dividen el dominio de la superficie en según las direcciones conjugadas UV, que además son ortogonales. Aunque esta familia sólo será válida para superficies con al menos una dirección de curvatura normal constante. En el caso particular de la discretización de las líneas de curvatura principal se obtienen una clase especial denominada malla cónica<sup>(14)</sup> (ver Fig. 23). La utilización de mallas cuadrangulares cónicas es importante para la construcción de mallas de caras equidistantes. Esta cualidad de las mallas cónicas permitirá la construcción de estructuras multicapa de forma libre. El caso de las mallas hexagonales es aún más interesante sabiendo que contienen los vértices de menor valencia posible. Además, cualquier malla hexagonal es una malla cónica.



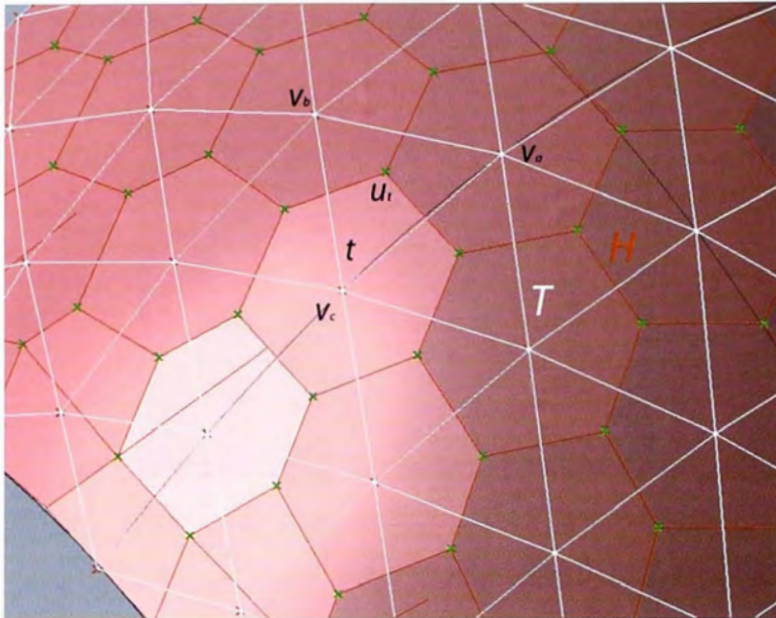


Fig. 27. Dualidad de tangencia.  
Fuente: Archivo de los autores.

No obstante, aún existe muy poca investigación sobre las mallas hexagonales. La mayoría de edificios construidos mediante hexágonos son esféricos, como en el caso de Proyecto Eden o las cúpulas geodésicas de Buckminster Fuller. El presente proyecto pretende servir como introducción a una investigación más profunda sobre las posibilidades de aproximación mediante elementos planos de una superficie de forma libre. En concreto se presenta un método de aproximación mediante una malla hexagonal.

El objetivo de este método es el de conseguir caras poligonales planas, hexagonales, que puedan ser fabricables mediante herramientas de corte y que generen una envolvente arquitectónica estanca. No hay que confundirlo con métodos como el mapeado, que consistiría en la proyección de una teselación plana sobre una superficie, por lo que se obtendrían piezas curvas o alabeadas, en función de la curvatura de la superficie, y que por supuesto suponen métodos de fabricación más complejos. Para garantizar la estanqueidad de la envolvente, las piezas deben estar ajustadas y encajadas sin dejar aire entre las piezas.

En general, suele requerirse de una teselación que sus piezas sean idénticas, sin embargo, la variación en tamaño y forma resulta inevitable cuando entra en juego la curvatura de la superficie. Pero esto se entenderá mejor tras la comprensión del proceso de diseño.

Como veremos a continuación es posible generar mallas hexagonales modificando la topología de la malla cuadrangular generada a partir de la discretización de las curvas UV. Este método sólo será aplicable para casos concretos de superficie con curvatura normal constante en al menos una dirección (Fig. 29). Posteriormente se introducirá un método basado en la tangencia de planos sobre triangulaciones de mallas CP.

#### 5.5.1 Malla hexagonal sobre familias de curvas UV

Este método de aproximación requiere de la definición de las familias conjugadas de isolíneas UV. Estas familias se obtienen fácilmente de la descomposición del dominio de la superficie a través de curvas de coordenadas U y V constante según el sistema de coordenadas local del dominio.

Para obtener la aproximación hexagonal partiremos de la malla cuadrangular. Esta última se genera a partir de una simple discretización de las isolíneas de la superficie como se muestra en la Fig. 24. Para hallar la malla hexagonal se produce un desplazamiento en U de caras en filas alternas, alineando los centros de las aristas de las filas pares sobre los vértices de las caras de las filas impares, o viceversa, obteniendo una disposición en fábrica de ladrillo (ver Fig. 25).

Los planos definidos por las caras de la 'fábrica' se intersecarán con las curvas en V, definiendo los vértices restantes de las caras hexagonales.

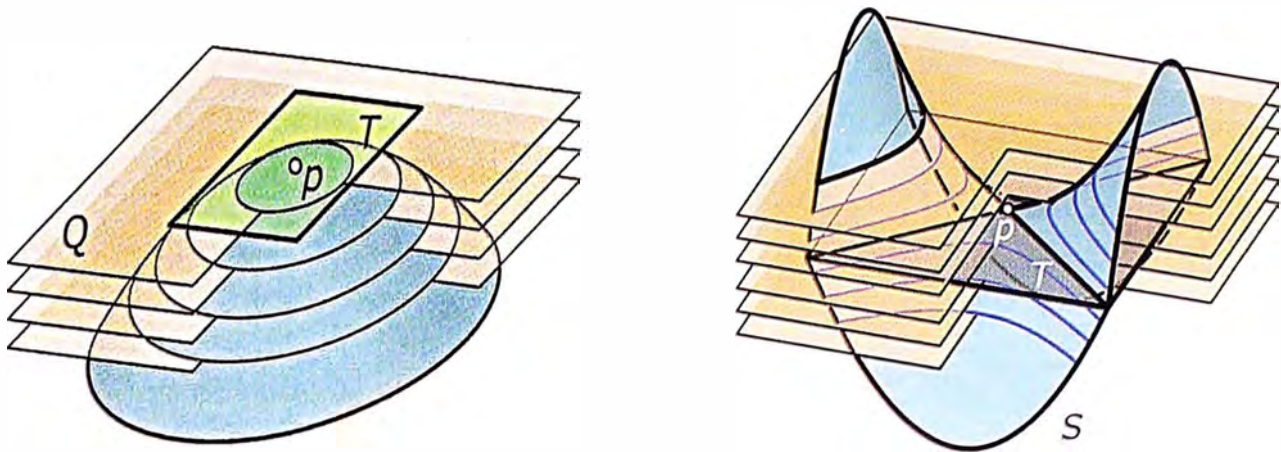


Fig. 28. Tangencias sobre paraboloides elíptico e hiperbólico.

Fuente: Pottmann, H. & Bentley, D., 2007. Architectural geometry. 1 edn. Exton Pennsylvania: Bentley Institute Press. Pág. 491.

Este método tiene grandes limitaciones que derivan de la geometría de la superficie. En el caso concreto de las superficies de revolución, presentan curvatura constante en la dirección en la que se produce el giro de la generatriz. Esto favorece que la simple discretización de la familia UV produzca la malla cuadrangular. En superficies con cambios de curvatura más abruptos se producen degeneraciones de la geometría en las zonas de curvatura gaussiana cercana a 0.

Para geometrías más complejas es necesario obtener familias de curvas conjugadas que permiten la aproximación mediante cuadriláteros, que después degenerarían hasta su transformación en hexágonos. Las familias ideales serían las líneas de curvatura principal de la superficie, a través de las cuales se obtendrían mallas cónicas cuadrangulares.

Se observa cómo la teselación hexagonal se modifica pasando de polígonos convexos a cóncavos (ver Fig. 26) en función del signo de la curvatura gaussiana  $K$ . Las zonas más problemáticas serán precisamente en las zonas cercanas a  $K=0$ , donde la teselación tiende a degenerarse dependiendo de la posición de los puntos de tangencia.

### 5.5.2 Malla hexagonal por intersección de planos tangentes sobre la superficie

Para la localización de los puntos de tangencia, este método requerirá de una triangulación predefinida

sobre la superficie. La triangulación deberá tener los vértices alineados sobre familias de curvas conjugadas. Las mallas CP proporcionan este tipo de triangulaciones, al alinearse los vértices sobre las líneas geodésicas de la superficie. Además, sabiendo que sobre las líneas geodésicas de la superficie la curvatura geodésica  $k_g=0$ , y sabiendo que ésta es la componente tangente a la superficie del vector curvatura, se puede afirmar que  $k_n$  es máxima, por lo que la tercera familia de curvas que compone las aristas de la triangulación será la de las líneas de curvatura principal máxima. Dicho de otro modo, las 3 familias de aristas que forman las caras de la malla serán discretizaciones de las familias de líneas geodésicas y de la familia de líneas de curvatura principal máxima.

### 5.5.3 Dualidad de tangencia

Como ya se ha avanzado, existe una correspondencia dual entre una malla hexagonal y la triangulación de la superficie. Supongamos el caso general de una triangulación regular, esto significa que todos los vértices serán de valencia 6. Y consideremos además que la curvatura gaussiana de la superficie será  $K=0$ .

Consideremos una malla T (Fig. 27) suficientemente densa, cuyos vértices están sobre la superficie S. Siendo  $t$  un triángulo de T con vértices  $v_a$ ,  $v_b$  y  $v_c$ , los tres planos tangentes a S en cada vértice del triángulo se intersectan en un punto que llamaremos  $u_t$  que estará asociado a la posición



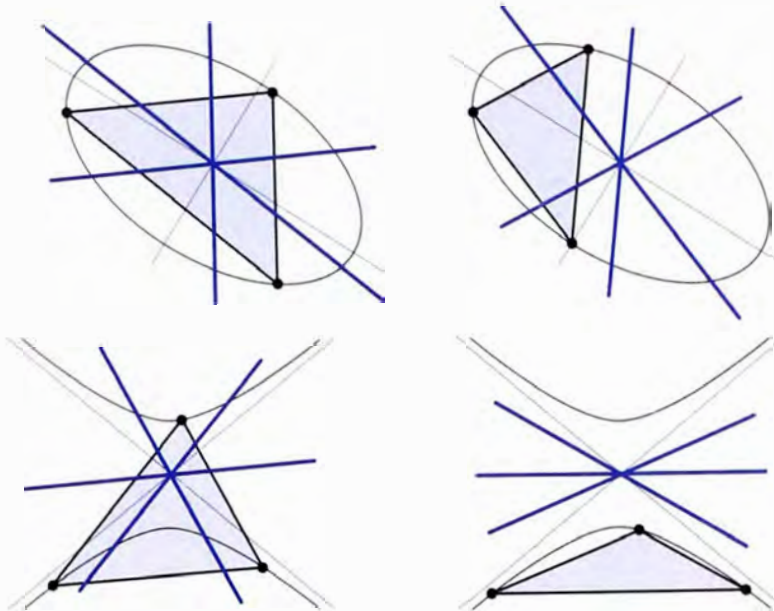


Fig. 29. Dualidad cónica. A la izquierda los triángulos válidos, a la derecha los no válidos. Las rectas azules marcan las direcciones de cada arista centrada en el origen de la cónica.

Fuente: Wang, W., Liu Y., Yand., Chan, B., Ling, R. & Sun, E., 2008. Hexagonal Meshes with Planar Faces. Hong Kong: Department of Computer Science, The University of Hong Kong.

del triángulo. Realizando la misma operación con todos los triángulos de  $T$  y conectamos todos los puntos  $u_t$ , obtenemos la hexagonal  $H$  que será combinatoriamente dual a  $T$ .  $H$  por lo tanto será una aproximación de  $S$ . Existe pues una correspondencia entre los puntos de tangencia de  $H$  sobre  $S$  y los vértices de  $T$  también sobre  $S$ , a esta correspondencia se le llama dualidad de tangencia.

88

Aunque el concepto de dualidad de tangencia supone una herramienta geométrica muy sencilla, su comportamiento será más bien complejo. Hay varias cuestiones que deben ser aclaradas antes de poner en práctica este método. Primero, una triangulación de  $S$  puede generar errores en la malla hexagonal, teniendo en cuenta la dualidad de tangencia, al presentar intersecciones entre sus propias caras. Para evitar este error es necesario identificar y diseñar la triangulación apropiada que produzca hexágonos válidos sin "autointersecciones". Por otro lado, la naturaleza del punto de tangencia será crucial para el éxito de la triangulación. Esto implica sobre todo al valor de la curvatura gaussiana en cada punto.

El procedimiento sería, ubicar un plano  $\Gamma$  sobre cada vértice de una malla triangular infinitamente densa. Elegir un único vértice que tomaremos como origen en nuestro ejemplo. En el caso de que se trate de un punto elíptico, trazando un plano  $\Gamma'$  paralelo (y muy próximo) a  $\Gamma$  que corte a  $S$ , obtenemos una curva plana  $C$  muy similar a la elipse dada por el paraboloido

elíptico<sup>(15)</sup>. Si trazásemos un polígono contenido en este plano  $\Gamma'$  cuyos vértices estuviesen sobre la superficie, necesariamente la curva  $C$  circunscribiría al polígono, o de manera más precisa, dicha curva contendría a los vértices del polígono. El polígono generado sería necesariamente convexo y a través de una transformación homotética se proyectaría el polígono sobre el plano tangente  $\Gamma$  (ver Fig. 28).

En el caso de un punto hiperbólico la curva de corte sería una hipérbola, lo que implicaría necesariamente que cualquier polígono sobre el plano  $\Gamma'$  (o sobre el plano  $\Gamma$ ) y con vértices sobre la curva sería cóncavo. Es por esto que no sería posible obtener teselas planas hexagonales convexas sobre superficies de curvatura negativa. De manera análoga, en puntos parabólicos el corte de la superficie produciría líneas paralelas, reduciendo el campo a polígonos inscribibles siempre de dentro de cuadriláteros planos.

El método de tangencia estaría muy limitado en la generación de polígonos sobre superficies cilíndricas o regladas, es por eso que el ámbito de estudio del presente trabajo se centra en el estudio de superficies de doble curvatura.

#### 5.5.4 Dualidad cónica

Las mallas hexagonales son de poca utilidad si sus caras se auto-intersecan. Decimos que una malla hexagonal si tiene hexágonos válidos, para lo cual es necesario que las caras hexagonales sean planas y



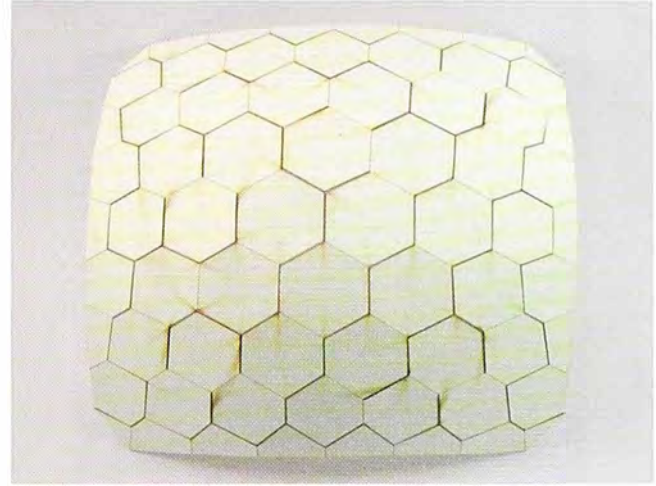
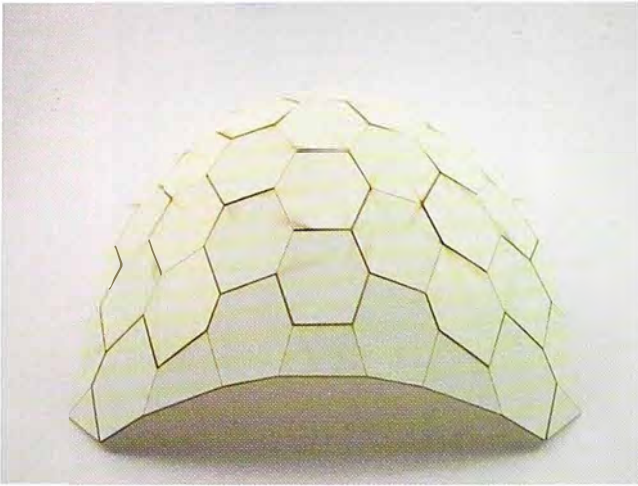


Fig. 30. Piezas generadas mediante aproximación hexagonal.  
Fuente: Archivo de los autores.

simples. Del mismo modo, la triangulación  $T$  se dice que es válida si a través de la dualidad de tangencia es posible obtener una hexagonal válida. Para verificar la validez de la triangulación, en este caso se utilizó principalmente el paraboloides osculador como indicador.

Para puntos elípticos, el triángulo  $t$  proyectado sobre el paraboloides osculador vendrá inscrito en una elipse. Como norma general  $t$  será válido si el centro de la cónica sobre la que descansan los vértices del triángulo está dentro de la región definida por el triángulo.

En el caso de puntos hiperbólicos, los puntos del triángulo se tienen que localizar en ambas ramas de la hipérbola sobre el paraboloides osculador, por lo que igualmente el origen de la hipérbola estará dentro de la proyección del triángulo. A esta correspondencia le llamaremos dualidad cónica (ver Fig. 29).

La triangulación deberá evitar la formación de triángulos con ángulos excesivamente agudos (u obtusos), por lo general deberán aproximarse bastante a un triángulo equilátero. Para el caso de cuando la  $K > 0$ , suponiendo los 6 triángulos  $t_i$ , con  $i$  entre 1 y 6, adyacentes a un vértice y partiendo de un criterio que podríamos decir natural, los polígonos válidos, podrían generarse mediante transformaciones afines de un hexágono regular (ver Fig. 30). Esto ocurre cuando el centro de la cónica,

en este caso una elipse, coincide con el centroide de cada triángulo, por lo tanto la posición de la cónica con respecto al centroide de cada triángulo influirá en las deformaciones que sufrirá el polígono resultante.

Cuando  $K < 0$ , el polígono resultante, con la forma de una pajarita, se forma mediante la unión de dos mitades de hexágono por su lado central más corto (ver Fig. 31). La transformación afín ideal se producirá cuando la hipérbola se alinee con su origen en el punto medio ente el centroide de  $t$  y sus 3 vértices.

Cuando el centro de la cónica está fuera de su localización ideal, la forma del polígono degenerará. No obstante, mientras se mantenga dentro de los límites del triángulo  $t$ , éste será válido y producirá hexágonos sin auto-intersecciones.

El algoritmo diseñado trazará los planos tangentes a la superficie sobre puntos elípticos e hiperbólicos. El programa evitará el trazado de planos tangentes en puntos con curvatura cercana a cero debido a los problemas de intersecciones que se generan. Aunque se han conseguido resultados positivos en la teselación de las áreas de curvatura cercana a cero, los polígonos obtenidos no resultan válidos para su fabricación, al disponer de ángulos demasiado agudos y generar auto - intersecciones que es necesario eliminar manualmente.

El algoritmo presentado por lo tanto aún está en proceso de desarrollo, aunque su funcionamiento

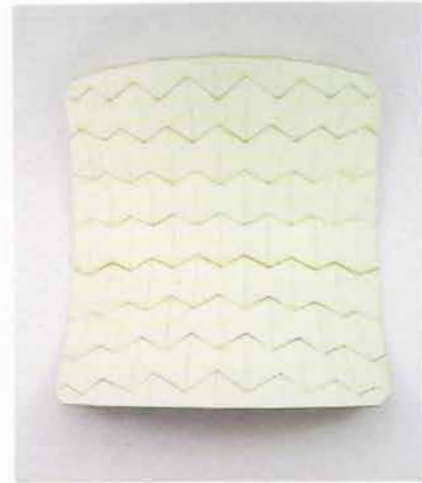


Fig. 31 Piezas generadas mediante aproximación hexagonal.  
Fuente: Archivo de los autores.

en superficies sinclásticas y anticlásticas si está garantizado.

## 6. Conclusiones

Se ha demostrado como mediante scripting es posible controlar las propiedades de una superficie para obtener aproximaciones discretas de la misma. Estas mallas se componen de piezas planas que deben tener una forma apropiada no sólo para su fabricación sino para el montaje del sistema envolvente completa.

Existen limitaciones formales muy importantes asociadas tanto a la geometría de la superficie como a la de la propia tesela, sobre todo desde el punto de vista de su fabricación. Se entiende por tanto que no es posible aplicar un despiece arbitrario a cualquier superficie.

El proceso de optimización mediante circlepacking asegura que la triangulación será construible, al generar una estructura desde restricciones que responden a un criterio estructural, constructivo o arquitectónico si se prefiere. Como resultado se obtiene un modelo que puede ser fácilmente evaluable mediante otras aplicaciones informáticas, como modelo en simulaciones estructurales por ejemplo.

Los métodos de triangulación propuestos no sólo sirven para el desarrollo de mallas poligonales sino

que también pueden ser sistemas de optimización de estructuras de barras por si mismos.

## 7. Notas Bibliográficas

- (1) Las aplicaciones de diseño asistido por ordenador (CAD), asisten hoy día a ingenieros arquitectos y diseñadores para el dibujo en dos dimensiones y el modelado en tres dimensiones. Un paso más serían las herramientas de modelado de información para la edificación, conocidas como BIM, que son capaces de la generación y gestión de datos del edificio a la vez que se realiza el modelado en tres dimensiones.
- (2) En informática un script, archivo de órdenes, archivo de procesamiento por lotes o guion es un programa usualmente simple, que por lo regular se almacena en un archivo de texto plano. El uso habitual de los scripts es realizar diversas tareas como combinar componentes, interactuar con el sistema operativo o con el usuario.
- (3) La utilización de mallas de doble capa permite la utilización de nudos articulados en cualquier dirección. Sin embargo requieren una gran cantidad de acero y de complejidad en el nudo, por el elevado número de barras que concentran. La distorsión estética que se produce es importante si atendemos al diseño de la teselación e incluso a la forma de la superficie que aproximarían.
- (4) La valencia del vértice es el número de aristas adyacentes a cada vértice de la malla, que se traduce en número de barras en una estructura real. El número de valencia en estructuras trianguladas es de forma general 6, pero es frecuente la aparición de

vértices irregulares de valencia 5 ó 7, incluso 4 y 8 en casos muy degenerados. Una de las finalidades de los métodos de triangulación que se describen más adelante es la reducción de vértices irregulares en la malla.

- (5) Las superficies pueden ser abiertas o cerradas según el número de fronteras que presenten. Una esfera o un toro serán superficies cerradas puesto que no presentan frontera además encierran un volumen. Una superficie con frontera puede presentar 1 o más fronteras y un ejemplo de ella puede ser la superficie delimitada por cualquier polígono, que presentarían 1 frontera, o la superficie delimitada entre dos círculos concéntricos, un anillo plano, en este caso la superficie presentaría dos fronteras y un agujero.
- (6) El género topológico hace referencia a una propiedad de invariancia en el objeto considerado, concretamente al número de 'agujeros' o 'asas' que presenta un objeto. Este número permanece invariable al aplicarle transformaciones al objeto.
- (7) Se dice que dos superficies son homeomorfas cuando son topológicamente equivalentes, esto es, tras realizar diferentes transformaciones sobre la superficie original es posible obtener la siguiente sin que varíen las propiedades topológicas de la primera. De un modo más formal se puede decir que dos figuras presentan un homeomorfismo si comparten la misma característica de Euler:

$$X = F - E + V$$

Por ejemplo, en todas las superficies homeomorfas a una esfera (elipsoide, icosaedro, o cualquier superficie cerrada de género  $g=0$ ) se cumple que  $X=2$ . La característica de Euler ( $X$ ) nos da una relación

precisa entre el número de caras ( $F$ ), de vértices ( $V$ ) y de aristas ( $E$ ) dependiendo de la clase topológica a la que pertenezca. Por otro lado la característica de Euler se relaciona con el género de la malla mediante la expresión:

$$X = F - E + V = 2 + 2g$$

Por lo que el género topológico también nos servirá como indicador de homeomorfismo. Existen otras propiedades topológicas que pueden resultar invariantes pero que no son relevantes para el desarrollo del presente trabajo.

- (8) La condición de Delaunay dice que una red de triángulos es una triangulación de Delaunay si todas las circunferencias circunscritas de todos los triángulos de la red son vacías, es decir, la circunferencia circunscrita de cada triángulo de la red no contiene otros vértices aparte de los tres que definen el triángulo. Esa es la definición original para espacios bidimensionales, y es posible ampliarla para espacios tridimensionales usando la esfera en vez de la circunferencia circunscrita. Esta condición asegura que los ángulos del interior de los triángulos son lo más grandes posibles, la longitud de los lados de los triángulos es mínima y la triangulación formada es única.
- (9) Se puede generalizar y afirmar que una triangulación  $T$  de un conjunto  $P$  de puntos en el plano es una triangulación de Delaunay, si y solamente si, todas las aristas son legales. Se llama arista legal, a toda arista de una triangulación que pertenece a dos triángulos tal que la circunferencia circunscrita a uno de los triángulos no contiene al punto restante



DISCRETIZACIÓN DE SUPERFICIES			
ELEMENTOS CURVOS	ELEMENTOS PLANOS		
No se producen distorsiones de la forma de la superficie original. Elementos de fabricación compleja debido a su geometría curva y alabeada. Normalmente diseñados mediante mapeados directos de teselaciones sobre superficies.	Se produce distorsión de la superficie original en función de la densidad de la malla. Dicha distorsión hace que se conozcan como métodos de aproximación. La malla es una aproximación de la superficie.		
	CARAS TRIANGULARES		CARAS POLIGONALES
	A partir de triangulaciones de Delaunay, utilizamos empaquetado de círculos para optimizar triangulaciones que luego utilizaremos para generar mallas poligonales. El empaquetado de círculos se utiliza en dos métodos de optimización.		Hexágonos, en el caso de estudio propuesto. Necesidad de una malla triangulada dual inicial, ya sea desde familia de curvas UV o triangulaciones optimizadas según los métodos propuestos.
	Optimización mediante equalización de aristas.	Optimización mediante distribución de distancias mínimas entre vértices.	Polígonos sobre familias de curvas UV.
Dichos métodos de optimización nos proporcionan una malla triangular dual aplicable al método de intersección de planos tangentes.			

Cuadro 1. Discretización de superficies.

que pertenece al otro triángulo. Una arista ilegal de una triangulación es la arista que pertenece a dos triángulos tales que forman un cuadrilátero convexo y si se intercambia dicha arista por la otra diagonal del cuadrilátero mejora el vector de ángulos. A esta operación que consiste en sustituir una diagonal por la otra en un cuadrilátero se le denomina intercambio de aristas o 'flip'.

- 92
- (10) El teorema de Gauss-Bonnet conecta la geometría con su topología relacionando de forma general la integral de la curvatura Gaussiana por unidad de superficie con la característica de Euler por 2.
- (11) La curvatura de una curva en un punto P, sin entrar en profundidad en definiciones matemáticas, se calcula mediante la inversa del radio de curvatura, que equivale al radio de la circunferencia oscultriz tangente a la curva en P, donde se define una dirección tangente t y otra normal n. En el caso de la curvatura normal  $kn$  de una superficie S en un punto P, se puede definir mediante la inversa del radio de la circunferencia oscultriz tangente a la curva C contenida en un plano normal a S en P, definiéndose n como el vector normal a la superficie y siendo u el vector tangente a la superficie S en la dirección de curvatura. El vector curvatura normal es la proyección sobre la normal n del vector curvatura C. El vector C se puede descomponer en su componente normal a la superficie  $kn$ , vector curvatura normal, y su componente tangente a la superficie que será  $kg$ , o vector curvatura geodésica. Como la curvatura normal ha de tomar valores máximos y mínimos, éstas son las llamadas curvaturas principales.

Aquellas direcciones donde la curvatura normal toma sus valores máximos y mínimos se llaman direcciones principales. Un punto es umbilical si en ese punto todas las direcciones son principales. El producto de las curvaturas principales define lo que se conoce como curvatura gaussiana:

$$K = k_1 \cdot k_2$$

Se trata de la curvatura positiva, negativa o cero en función del signo de K. La curvatura gaussiana nos da una medida de la variación de las normales en el entorno de P. Valores altos darán desviaciones de la normal de la superficie más abruptas, mientras que valores bajos darán superficies más suavizadas. En función del signo de K es posible clasificar los puntos de una superficie: los puntos elípticos tendrán  $K > 0$ ; los puntos hiperbólicos  $K < 0$ ; los puntos parabólicos y los puntos planos contarán con  $K = 0$ .

- (12) El problema de Thomson y Tamme se puede resumir en cómo encontrar el mayor diámetro de n círculos sobre una esfera tal que al colocarlos no se solapen.
- (13) Se dice que dos familias de curvas A y B son conjugadas cuando es posible trazar rectas tangentes a A sobre puntos de B, o viceversa, de forma que las rectas tangentes forman una superficie reglada desarrollable. Cualquier familia de curvas ortogonales pueden ser conjugadas, pero ésta no es una condición indispensable.
- (14) Una malla es cónica cuando todos sus vértices son cónicos. Un vértice se llama cónico cuando las caras adyacentes al vértice son tangentes a un cono de revolución común. La mallas cónicas estarán formadas por vértices de valencia 3 y 4.

LIMITACIONES DE LAS MALLAS TRIANGULARES	
<b>GEOMÉTRICAS</b>	Cuando la curvatura de la superficie o la forma de su frontera produce distorsiones del dominio de la superficie. (Sólo para el método de eualización de aristas y ángulos).
	En la superficie se originarán como vértices irregulares todos aquellos que tengan valencia 6, exceptuando los vértices del borde. (Sólo para el método de distribución en función de distancia mínima).
	Defecto angular.
<b>CONSTRUCTIVAS</b>	Nudos de valencia 6 como extensión al dominio de la superficie de teselación.
	No es posible generar mallas equidistantes a mallas trianguladas, excepto en las esferas y planos.
	No es posible utilizar mallas triangulares para la construcción de estructuras multicapas de forma libre con la capas paralelas.
<b>ECONÓMICAS</b>	Gran repercusión en el precio de las uniones en cada metro de malla ejecutada y de la cantidad de barras necesarias para el montaje.

Cuadro 2. Limitaciones de las mallas triangulares

En caso de vértices de valencia 4, normalmente mallas cuadrangulares, en casos muy específicos será posible obtener mallas cónicas. En el caso de vértices de valencia 3, la propiedad de cónica viene implícita en su definición.

- (15) El paraboloides osculador se define como la superficie tangente a S en el punto P que indicaría la desviación de los puntos de la vecindad de P desde el plano tangente T a S en P.

La naturaleza del paraboloides indica si los puntos de la proximidad de P quedan por arriba o por abajo del plano tangente. En función de la forma del paraboloides osculador los puntos de una superficie se clasifican en:

Punto elíptico: el paraboloides osculador es un paraboloides elíptico, por lo que los puntos de la vecindad de P quedan por debajo del plano T. Los planos paralelos a T cortarían a la superficie en curvas cercanas a una elipse que degenerarían en el punto de tangencia.

Punto hiperbólico: En éste caso se trata de un paraboloides hiperbólico. En las proximidades de un punto hiperbólico la superficie se halla a ambos lados del plano tangente T, que cortarían al paraboloides formando hipérbolas con vértice y origen en el punto de tangencia.

Punto parabólico: La superficie será en este caso un cilindro parabólico.

Punto plano: En este caso el paraboloides osculador degenera en el propio plano tangente.

## 8. Bibliografía

- Bobenko, A. (2008). *Discrete differential geometry*. Basel: Springer.
- Ceccato, C. (2010). *Advances in architectural geometry*. Wien : Springer.
- De Berg, M. (2008). *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. (3<sup>era</sup> ed.). Berlin: Springer-Verlag.
- Foreign office architects. (2003). *Filogénesis: Las especies de Foa*. Barcelona: Actar.
- Kolarevic, B. (2003). *Architecture in the digital age: design and manufacturing*. New York: Taylor & Francis Group.
- Kolarevic, B. & Klinger, K.R. (2008). *Manufacturing material effects: rethinking design and making in architecture*. New York: Routledge.
- Lynn, G. (2004). *Folding in architecture*. Chichester: Wiley-Academy.
- Montesdeoca, Á. (2004). *Apuntes de Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. [versión digital]. Recuperado de: <http://amontes.webs.ull.es/apuntes/gth.pdf>
- Montesdeoca, A. (2001). *Geometría proyectiva: Cónicas y cuádricas*. Tenerife: Dirección General de Universidades e Investigación.
- Moussavi, F., Kubo, M., & Hoffman, J.S. (2006). *The function of ornament*. Barcelona: Actar.
- Moussavi, F. & López, D. (2009). *The function of form*. Barcelona: Actar.

Oxman, R. & Oxman, R. (2010). The new structuralism: design, engineering and architectural technologies. *Architectural Design*. 80(4), 14-23.

Piker, D. (2012, 9 febrero). blog: Space symmetry Structure. Recuperado de: <http://spacesymmetrystructure.wordpress.com/2012>.

Pottmann, H. & Bentley, D. (2007). *Architectural geometry*. Exton Pennsylvania: Bentley Institute Press.

Rutten, D. (2007). *Grasshopper3D*.

Schiftner, A., Höbinger, M., Wallner, J. & Pottmann, H. (2009). Packing circles and spheres on surfaces. *ACM Transaction on Graphics (TOG)* 28 ( 5), 139.

Troche, C. (2009). *Planar Hexagonal Meshes by Tangent Plane Intersection*. Kassel: Universität Kassel.

Wang, W., Liu Y, Yan D., Chan, B., Ling, R. & Sun, F. (2008). *Hexagonal Meshes with Planar Faces*. Hong Kong: Department of Computer Science, The University of Hong Kong.