

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS



TESIS

“INTERACCIÓN ASINTÓTICA DE DOS VÓRTICES EN EL
MODELO NIELSEN - OLENSÉN”

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE:
LICENCIADO EN FÍSICA

ELABORADO POR:
MANUEL ROBERTO VASQUEZ CASTELLANOS

ASESOR:
DR. ROSENDO OCHOA JIMENEZ

LIMA - PERÚ
2020

DEDICADO A

Mis padres, a mi padre Roberto por haber dado todo de si para convertirme en un profesional, a mi madre Rosario por ser mi primera maestra e inculcarme los valores y la fortaleza para conseguir mis metas.

Mis hermanos mayores, Joel y Nathalie por ser un ejemplo a seguir en mi vida, ayudándome y dándome consejos a lo largo de mi vida universitaria.

Mis sobrinas, Milagritos y Valeria por ser esa pequeña alegría en mi vida.

Mi familia en general, porque cada uno de ellos contribuyeron para convertirme en un profesional.

A Dios, por haberme dado salud y sabiduría a lo largo de mi vida

AGRADECIMIENTO

AL DR. ROSENDO OCHOA JIMENEZ POR SU ASESORAMIENTO, PACIENCIA, AMISTAD, CONFIANZA Y CONCEJOS EN EL DESARROLLO DE ESTA TESIS. SIN SUS RECOMENDACIONES Y OBSERVACIONES NO HUBIERA SIDO POSIBLE LA CULMINACIÓN DE ESTA TESIS.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	1
2. MARCO TEÓRICO	5
2.1. TEORÍA LAGRANGIANA DEL CAMPO	5
2.1.1. Cadena Lineal	6
2.1.2. Problema Variacional General	8
2.2. TEOREMA DE NOETHER	9
2.3. TENSOR ENERGÍA - MOMENTO	11
3. VORTICES	15
3.1. INTRODUCCIÓN	15
3.2. ARGUMENTO DE ESCALA	15
3.3. RUPTURA ESPONTANEA DE LA SIMETRÍA	17
3.4. ESTABILIDAD EN EL MODELO NIELSEN-OLENSEN	21
3.5. RUPTURA ESPONTANEA DE LA SIMETRÍA EN EL M.N.O	24
3.6. MECANISMO DE HIGGS EN EL MODELO NIELSEN - OLENSEN	27
4. INTERACCIÓN DE SOLITONES ESCALARES	31
4.1. LA ECUACIÓN NO LINEAL DE KLEIN-GORDON (NLKGE)	31
4.2. INTERACCIÓN DE DOS SOLITONES ESCALARES SIMÉTRICOS	31
4.3. INTERACCIÓN DE DOS SOLITONES ESCALARES ASIMÉTRICOS	36
5. INTERACCIÓN DE SOLITONES ESPINORIALES	41
5.1. EL MODELO DE SOLER	41
5.2. INTERACCIÓN DE SOLITONES EN EL MODELO DE SOLER	42
6. INTERACCIÓN DE DOS VÓRTICES EN EL MODELO NIELSEN - OLENSEN	53
7. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS	69
Bibliografía	71
APÉNDICE	75

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Una de las teorías que nació a mediados del siglo XX fue la teoría de solitones, aquella teoría que une con claridad la matemática y la dinámica no lineal, dicha teoría juega un papel importante ya que aparece en los diferentes áreas de la física, por ejemplo en la física de la materia condensada, la física nuclear, la cosmología, la física de partículas e incluso en la vanguardista teoría de las cuerdas.

Comúnmente hablamos de dos tipos de ondas. Las primeras, las ondas lineales aquellas que se aproximan a las ondas de la vida diaria, como por ejemplo, las ondas de luz y las ondas de sonido. Estas ondas tienen velocidad constante, sea cual sea su forma. Las ondas lineales también obedecen al llamado principio de superposición.

La contraparte a las ondas lineales son las ondas no lineales, estas ondas son más aproximadas a las reales. Una ola en el mar aproximándose hacia la orilla es un buen ejemplo de onda no lineal. Observamos que ahora la amplitud, la longitud de onda y la velocidad, van variando según avanza la ola, mientras que en las ondas lineales estas son constantes. La distancia entre las crestas va decreciendo, la altura de las ondas va creciendo mientras van percibiendo el fondo, y la velocidad cambia; la parte superior de la ola se adelanta sobre la inferior, cae sobre ella y la ola rompe [38]. Hay fenómenos aun más complicados como el de dos olas que se cruzan, interactúan de forma complicada y no lineal, y dan lugar a tres olas en lugar de dos. La teoría de solitones nació en 1834 debido a la observación perspicaz del ingeniero naval escocés *John Scott Russell*, el cual estaba observando el paso de un bote a lo largo de un canal y noto un tipo muy extraño de ola que viajaba a lo largo del canal sin cambiar su forma, fascinado por lo que había observado [30], Russell construyó un tanque de olas de 30 pies en su patio trasero y llevo a cabo experimentos, los solitones presentan las siguientes propiedades [6]

- i. La amplitud de la onda es directamente proporcional a la velocidad.
- ii. Estas ondas no obedecen el principio de superposición. Cuando una onda más alta (más rápida) supera una onda más corta (más lenta), no se combina y se suman. En cambio, parecen intercambiar lugares con la ola más rápida que parece saltar por la más lenta.
- iii. Estas ondas no presentan dispersión es decir son ondas estables que pueden viajar distancias muy grandes sin cambiar su forma, su amplitud y su energía.

Los solitones se componen de dos partes fundamentales: *la envoltura y las ondas portadoras*, como se muestra en la siguiente imagen.

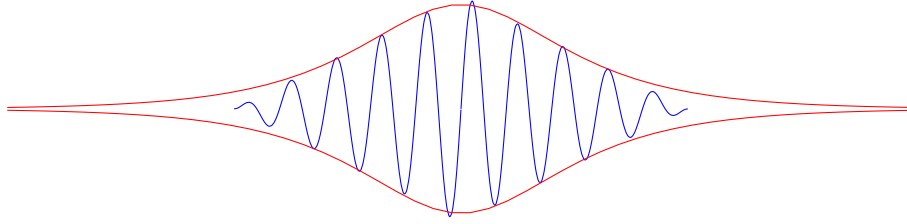


Figura 1.1: Partes de una onda solitaria, las ondas azules son las denominadas ondas portadoras y la onda roja es la onda envolvente.

Las ondas portadoras del solitón se comportan de una manera muy concreta. En un paquete de ondas, dependiendo de como se comporten las ondas portadoras, es decir, de si continúan propagándose en forma de paquete sin distorsionarse o de si unas se aceleran frente a las otras. Bien se distorsionan al principio o al final del paquete, aparecen dos efectos que rompen su simetría. El primero es la *dispersión*, debida a que cada frecuencia de onda se propaga a diferentes velocidades (por eso una onda de las ondas portadoras se adelanta a las otras); y el segundo es el llamado *efecto Kerr*, que produce un efecto similar, debido a las no-linealidades del medio en que se propague la onda: un cable, el agua, etc. En aquellos casos en que estos dos efectos se compensen y el paquete de ondas se mantenga intacto, surgirán los solitones.

Después de 60 años los científicos alemanes Korteweg y De Vries publicaron en 1895 [4] su trabajo sobre la modelación de una onda que viaja a la superficie de un canal encontrando que dichas ondas satisfacen la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

la anterior ecuación es conocida también como la famosa ecuación **KdV** en forma general, donde el segundo termino es el término de dispersión y el tercero es el no lineal, dicha ecuación presenta una solución explicita tipo solitón el cual es la siguiente: [38]

$$u(x, t) = -\frac{12}{\alpha} a^2 \operatorname{sech}^2[a(x - 4a^2t - x_0)] \quad (1.2)$$

la solución anterior (1.2) representa a una onda solitaria, donde a el cual representa la amplitud nos da información acerca de la forma que la onda tiene.

En 1965, Zabusky y Kruskal resolvieron la ecuación KdV numéricamente. Además, probaron matemáticamente que si dos ondas solitarias colisionan, cada una de ellas pasa a través de la otra sin deformarse y con un solo pequeño cambio de fase. En otras palabras, después de chocar continúan su camino como si nada hubiera ocurrido. Un análisis detallado confirmó que cada pulso es una onda solitaria de tipo sech^2 como en la ecuación (1.2) y las ondas solitarias se comportan como partículas estables. Debido a esto Zabusky y Kruskal las llamarán *solitones*, donde el sufijo “*on*” proviene de la palabra griega para “partícula”; solitón significa, pues, una onda solitaria que se comporta como partícula [40].

Los matemáticos, en sus investigaciones, descubrieron que estos solitones no eran exclusivos de la ecuación KdV, sino que además existe toda una variedad de ecuaciones diferenciales parciales que poseen soluciones con las mismas o similares características de

ellos.

Por ejemplo en algunas *Teorías de Campos*, en específico en aquellas que sufren una ruptura espontánea de su simetría, en las cuales existen soluciones bajo la forma de paquetes de energía que no se disipan bajo pequeñas perturbaciones que no es otra cosa que una solución solitón. La utilidad de estas soluciones a nivel cuántico es la de describir partículas en la Física de Partículas.

Fue por ello que en 1973 Nielsen - Olesen [22] en un trabajo sin antecedentes, analizaron soluciones clásicas del tipo de una cuerda con las propiedades de un vórtice con un flujo magnético cuantificado, la cual tienen como origen las propiedades topológicas del espacio de las soluciones de teorías con una rotura espontánea de su simetría. Dichas soluciones provienen de la analogía entre el modelo fenomenológico de Ginzburg - Landau para explicar la superconductividad de tipo II y el modelo Abeliiano de Higgs.

Los vórtices de Nielsen y Olesen son las soluciones estáticas y con simetría axial de las ecuaciones de movimiento de una Teoría Abeliiana de Higgs. Una investigación posterior a este realizadas por 't Hooft [37] y Polyakov [25] de una Teoría no Abeliiana basado en el modelo de Georgi - Glashow [11], descubrieron soluciones estáticas y localizadas de energía finita y con simetría esférica. Dichas soluciones al igual que los vórtices de Nielsen - Olesen tienen un flujo magnético cuantificado por propiedades topológicas, presentaban propiedades análogas a las de los monopolos de Dirac [8] cuando se encuentran a grandes distancias.

A mediados de la década de los 70 se tuvo una gran expectativa en la idea de utilizar los vórtices y monopolos como un modelo para describir las interacciones nucleares fuertes. Sin embargo, existió una dificultad para unir modelos clásicos asociados con acoplamientos débiles a la teoría de interacciones fuertes [27].

Pero gracias a la propuesta de Polyakov [24] el cual utiliza una Teoría de Gauge puro (Campo de Yang-Mills), sin campos de Higgs, en las cuales pueden encontrarse soluciones trabajando en el espacio euclidiano con topología no trivial y acción finita la cual se denominan *instantones*. Estas soluciones podrían ser responsables de las propiedades que existe en un modelo o teoría de interacciones fuertes; en particular, en teorías que abarquen el tema de confinamiento de *quarks*. Basado en esta propuesta se comprendió que tanto los vórtices y monopolos podrían ser tomadas como soluciones del tipo instantón en un espacio de dos y tres dimensiones respectivamente.

Se ha desarrollado una breve reseña sobre el origen, características y aplicaciones de las soluciones tipo solitón, la cual se espera que haya mostrado el interés y la importancia de la teoría de solitones tanto en los diversos campos de la Física y la Matemática. No solo como modelos que expliquen la dinámica de las partículas y la interacción entre ellas. Si no también como una herramienta para construir nuevas teorías como la Teoría Topológica Cuántica de Campos (**TTCC**) [1], en este campo de las Teorías Topológicas en los últimos años ha habido avances y descubrimientos de gran interés; uno de los mas destacados quizás sea el descubrimiento de las transiciones de fase topológicas y estados topológicos de la materia basados en materiales de dos dimensiones realizado por Thouless, Haldane y Kosterlitz (Premio Nobel de Física de 2016) [10], donde dicho estudio

abre un nuevo campo en el estudio de la materia la cual puede asumir estados extraños y fases poco habituales, como los superconductores, superfluidos o finas capas magnéticas.

Esta tesis tiene como objetivo hallar la interacción de dos vórtices en la dirección del eje que une sus centros (eje \mathbf{Z}), los cuales son las soluciones asintóticas del Modelo de Nielsen - Olensen. Dichos vórtices forman un estado ligado de gran dimensión mucho mayor a las dimensiones de cada vórtice y la fuerza de interacción será hallada con ayuda del Tensor Energía - Momento, cabe aclarar que si bien ya hubo estudios de la interacción como modelos de interacciones fuertes en esta tesis se quiere hacer una comparación de la interacción de dos vórtices con la interacción de dos dipolos magnéticos a grandes distancias de acuerdo a los resultados que se obtuvo aplicando el Mecanismo de Higgs al Modelo de Nielsen - Olensen. Ya que de acuerdo con el ansatz de Nielsen - Olensen alrededor de la ubicación de solitón existe una corriente \vec{J} que circula alrededor de ella similar a una espira con corriente en la Teoría Electromagnética. Antes del desarrollo del objetivo de la tesis, se hallara las interacciones entre solitones que forman un estado ligado de gran dimensión en modelos no lineales que aceptan una solución tipo solitón.

Esta tesis se ha dividido en 7 capítulos. El capítulo 2 es un resumen de la teoría necesaria para el desarrollo de la tesis, como la Teoría Clásica Lagrangiana del Campo, El Teorema de Noether y El Tensor de Energía - Momento. El capítulo 3 es referente a los vórtices; en la cual describiremos el Modelo de Nielsen - Olensen, así como su ruptura espontánea de su simetría, la estabilidad de las soluciones a través del Teorema de Derrick y el desarrollo del Mecanismo de Higgs en dicho modelo para encontrar las masas de los Campos de Higgs y del Campo Gauge. El capítulo 4 es referente a la interacción de dos solitones escalares [31] que forman un estado ligado de gran dimensión, las cuales son las soluciones asintóticas de un modelo basado en la Ecuación de Klein - Gordon No Lineal (NLKGE), este capítulo se dividirá en dos casos: interacción para solitones escalares simétricos y asimétricos.

En el capítulo 5 seguirá el mismo propósito del capítulo 4 pero en este capítulo se considerara que los solitones presentan espín, dichos solitones son las soluciones asintóticas de la Ecuación de Dirac No Lineal (NLDE) mas específico en el Modelo de Soler [31], en este capítulo las direcciones de los espines de los solitones determinaran la intensidad de la fuerza de la interacción. En el capítulo 6 se tratara el objetivo de esta tesis que es el hallar la interacción entre dos vórtices que son soluciones asintóticas del Modelo Nielsen - Olensen y encontrar una cierta analogía con la interacción de dos dipolos magnéticos.

En el capítulo 7 se escribirá las conclusiones correspondientes de la tesis y después de la bibliografía se presenta un Apéndice el cual detalla los cálculos respectivos realizados en el desarrollo de la tesis.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

2.1. TEORÍA LAGRANGIANA DEL CAMPO

La Mecánica Lagrangiana fue introducida por el matemático franco-italiano Joseph Louis Lagrange en 1788 el cual combina la ley de conservación del momento lineal con la ley de conservación de la energía lo cual es fundamentalmente otra forma de ver la Mecánica Newtoniana, la valía de la Mecánica Lagrangiana con respecto a la Mecánica Clásica o Mecánica Newtoniana es que la Mecánica de Newton funciona bien cuando se trabaja en un sistema de coordenadas cartesianas, pero el problema surge cuando tratamos de escribir las leyes de Newton que están en forma cartesiana en otros sistemas coordenados. Por lo tanto esta mecánica se reformuló a la Mecánica Lagrangiana, el cual es independiente de los sistemas de coordenadas.

Para determinar la posición de un sistema de N masa puntuales en el espacio será necesario conocer N vectores de posición, es decir, $3N$ coordenadas, el número de magnitudes independientes que determinan de manera única la posición de un sistema se llama el número de *grados de libertad* del sistema. Para el sistema libre es igual a $3N$, la elección de estas magnitudes en la mecánica de Lagrange no son necesariamente las coordenadas cartesianas del punto y de las condiciones del problema, depende generalmente de la elección de otro sistema de coordenadas que nos sea más conveniente. Por ejemplo sea s magnitudes cualesquiera q_1, q_2, \dots, q_s que definen de manera completa la posición de un sistema de s grados de libertad se llaman sus *coordenadas generalizadas* y las derivadas de q_i sus *velocidades generalizadas* ($\dot{q}_i = dq/dt$).

Todo sistema mecánico está caracterizado por una función definida [18]:

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t) \quad (2.1)$$

donde el movimiento del sistema satisface la siguiente condición: supongamos que en los instantes $t = t_1$ y $t = t_2$ el sistema ocupa posiciones dadas, caracterizadas por los dos conjuntos de valores de las coordenadas $q^{(1)}$ y $q^{(2)}$; el sistema se mueve entre estas posiciones, de manera que la siguiente integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) \quad (2.2)$$

tome el menor valor posible. La función L se llama *Lagrangiana* del sistema y la integral (2.2) se le denomina *Acción*. La función de Lagrange no contiene más que q y \dot{q} y no las

derivadas superiores, esto es debido al hecho de que el estado mecánico de un sistema está completamente definido por sus coordenadas y sus velocidades.

Ahora extenderemos la formulación de la Mecánica Lagrangiana hacia sistemas que presentan infinitos grados de libertad como es el caso de los campos y con ayuda del principio variacional hallaremos la ecuación de *Euler-Lagrange* análogo para sistemas con un número finito de grados de libertad tal como se muestra en los libros de mecánica teórica.

2.1.1. Cadena Lineal

Para poder ver el paso de la mecánica de un sistema de puntos materiales a la mecánica de masa distribuido (por ejemplo un campo), imaginaremos una cadena lineal cerrada que consta de N puntos con masa m cada uno, los cuales están unidos uno con otro mediante resortes que poseen un coeficiente de rigidez k . Se supondrá que cuando el sistema esta en equilibrio la cadena es igual a un anillo de radio R y las distancias entre las masas vecinas es igual a l . Si se el sistema es perturbado y se saca del equilibrio las masas presentaran movimientos unidimensionales alrededor de la circunferencia del anillo, designaremos por u_s el desplazamiento del s -ésimo punto, por lo tanto, la energía total del sistema será [32]

$$T = \sum_{s=1}^N \frac{m}{2} \dot{u}_s^2, \quad (2.3)$$

y la energía potencial del sistema

$$V = \sum_{s=1}^N \frac{k}{2} (u_{s+1} - u_s)^2, \quad (2.4)$$

teniendo en cuenta la condición de periodicidad $u_{N+1} = u_1$, entonces la función de Lagrange del sistema será

$$L = T - V = \sum_{s=1}^N \frac{m}{2} \dot{u}_s^2 - \sum_{s=1}^N \frac{k}{2} (u_{s+1} - u_s)^2 \quad (2.5)$$

recordando la definición (2.2), ahora utilizando el principio variacional se obtiene la condición de estacionariedad del sistema [35]

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (2.6)$$

teniendo en cuenta que $\delta u_s(t_1) = \delta u_s(t_2) = 0$, $s = 1, 2, \dots, N$ y representan las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial u_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_s} = 0 \quad (2.7)$$

la solución de la ecuacion (2.7) son las funciones $u_s = u_s(t)$ determinan el llamado *camino recto* [32] en el que el sistema adquiere un valor estacionario y efectúa un movimiento real.

Desarrollando la ecuación (2.7) de acuerdo con nuestra función Lagrangiana (2.5) obtendremos la siguiente ecuación de movimiento escrita en forma explicita.

$$m\ddot{u}_s = k[(u_{s+1} - u_s) - (u_s - u_{s-1})], \quad s = 1, 2, \dots, N \quad (2.8)$$

Para pasar a la distribución continua de la masa respecto a la cadena, por lo tanto analizaremos cuando $l \rightarrow 0$ y $m \rightarrow 0$ teniendo en cuenta que la densidad lineal $\rho = m/a$ y el módulo de Young $\varepsilon = kl$ permanecen finitos. Considerando que el tamaño de la cadena no varía en este caso, la cantidad de puntos N y los grados de libertad del sistema tienden al infinito. En el límite la posición del punto s en el anillo se sustituirá por una magnitud continua x , o sea [32]

$$s \rightarrow x, \quad l \rightarrow dx \quad (2.9)$$

por consiguiente, la función de desplazamiento $u_s(t)$ se convertirá en una función de dos variables continuas x y t la cual satisface la condición de periodicidad, es decir,

$$u_s(t) \rightarrow u(x, t), \quad u(x + 2\pi R, t) = u(x, t) \quad (2.10)$$

por lo tanto, en el límite se tendrá

$$\begin{aligned} u_s - u_{s-1} &\rightarrow l \frac{\partial u}{\partial x} \\ (u_{s+1} - u_s) - (u_s - u_{s-1}) &\rightarrow l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.11) en la ecuación (2.8) conseguiremos la siguiente ecuación diferencial

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (2.12)$$

La ecuación diferencial (2.12) describe a las ondas longitudinales elásticas que se propagan por el anillo con una velocidad $(\varepsilon/\rho)^{1/2}$.

Reescribimos el Lagrangiano (2.5) de tal manera que se escriba de la siguiente manera

$$L = \sum_{s=1}^N \left(\frac{1}{2} l \frac{m}{l} \dot{u}_s^2 - l \frac{k}{2} \frac{(u_{s+1} - u_s)^2}{l^2} l k \right). \quad (2.13)$$

En el límite cuando $N \rightarrow \infty$ la suma discreta de sustituye por la integral

$$\sum_s = \frac{1}{l} \int dx, \quad (2.14)$$

por lo tanto (2.13) se reescribirá como

$$L = \int dx \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] = \int dx \mathcal{L}, \quad (2.15)$$

donde \mathcal{L} es llamada la *Densidad Lagrangiana*, por lo tanto la acción (2.2) se transformara en una integral doble

$$S = \int dt \int dx \mathcal{L}. \quad (2.16)$$

Si escribimos la ecuación diferencial de Euler para \mathcal{L} , considerando x y t como variables independientes se consigue la siguiente ecuación

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial t}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} = 0. \quad (2.17)$$

2.1.2. Problema Variacional General

Sea un sistema que contiene varios campos

$$\phi_r(x) \quad x = (t, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad r = 1, \dots, N \quad (2.18)$$

Esta teoría se definirá mediante una función $\mathcal{L}(\phi_r(x), \phi_{r,\alpha})$ donde

$$\phi_{r,\alpha} = \frac{\partial \phi_r}{\partial x^\alpha} \quad \alpha = 0, 1, 2, 3$$

tal que

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\phi_r(x), \phi_{r,\alpha}) \quad (2.19)$$

donde la función \mathcal{L} se definirá como la "*Densidad Lagrangiana*", entonces como la acción es:

$$S = \int dt L \quad (2.20)$$

En función de la densidad lagrangiana la acción se expresara de la siguiente manera.

$$S[\phi_r] = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi_r(x), \phi_{r,\alpha}) \quad (2.21)$$

donde $d^4x = dx^0 d^3x$ y Ω una región arbitraria de M^4 .

Entonces para una región Ω arbitraria y fija. La acción $S[\phi_r]$ tendra un valor estacionario es decir:

$$\delta S[\Omega] = 0, \quad (2.22)$$

entonces como:

$$S_{(\Omega)} = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\alpha}) \quad (2.23)$$

aplicando la variación

$$\delta S(\Omega) = \int_{\Omega} d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta \phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \delta \phi_{r,\alpha} \right) \quad (2.24)$$

donde $\delta \phi_{r,\alpha} = \frac{\partial \delta \phi_r}{\partial x^\alpha}$, entonces :

$$\delta S(\Omega) = \int_{\Omega} d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta \phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \frac{\partial \delta \phi_r}{\partial x^\alpha} \right), \quad (2.25)$$

por lo tanto, escribiendo la acción S de la siguiente manera:

$$\delta S(\Omega) = \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \right) \right] \delta \phi_r + \int_{\Omega} d^4x \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \delta \phi_r \right). \quad (2.26)$$

Analizando el término $\int_{\Omega} d^4x \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \delta \phi_r \right)$ y utilizando el *teorema de Stokes*:

$$\int_{\Omega} dw = \int_{\Gamma(\Omega)} w, \quad (2.27)$$

donde $\Gamma(\Omega)$ es la frontera de Ω en 3-dimensiones, entonces:

$$\int d^4x \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \delta \phi_r \right) = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \delta \phi_r \right) \quad (2.28)$$

pero:

$$\int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \delta \phi_r \right) = 0 \quad (2.29)$$

debido a que $\delta \phi_r = 0$ en $\Gamma(\Omega)$ (en el infinito se considera que $\phi \rightarrow 0$), por lo tanto, se tiene que la acción es:

$$\delta S(\Omega) = \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \right) \right] \delta \phi_r, \quad (2.30)$$

pero por el principio de mínima acción ($\delta S = 0$), se encuentra la *Ecuación de Euler - Lagrange* para sistemas que presentan un número infinito de grados de libertad (es decir campos) el cual se define de la siguiente manera.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \right) = 0 \quad (2.31)$$

2.2. TEOREMA DE NOETHER

El *teorema de Noether* quizás sea uno de los más grandes teoremas de la física en el siglo XX. Este resultado que fue probado en 1915 por la matemática de descendencia alemana *Emmy Noether* que permite a los físicos obtener cantidades conservadas de las simetrías de las leyes de la naturaleza [28].

Para el desarrollo del teorema utilizaremos el principio que fue enunciado por *Albert Einstein* en 1907 en su famosa *teoría general de la relatividad* el cual concluyo que su principio de equivalencia implica que las ecuaciones físicas se deben expresar de la misma forma para cualquier sistema de referencia equivalentes, al cual fue llamado el *principio de covariancia o invarianza de forma* [20].

Para demostrar dicho teorema vamos a considerar conjunto de transformaciones de punto y de campo

$$x_\mu \mapsto x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu \quad (2.32)$$

$$u(x) \mapsto u'(x) = u(x) + \delta_{\circ} u(x) \quad (2.33)$$

$$u(x) \mapsto u'(x') = u(x) + \delta u(x) \quad (2.34)$$

en donde el subíndice \circ es la variación del campo en un punto particular, por lo tanto, al realizar estas transformaciones la variación de la Densidad Lagrangiana será:

$$\mathcal{L}(u(x), u_{,\mu}(x)) \mapsto \mathcal{L}(u'(x'), u'_{,\mu}(x')) \quad (2.35)$$

Si suponemos la covarianza de la Densidad lagrangiana, es decir que la misma forma funcional para las cantidades transformadas será la misma para las cantidades originales, por lo tanto:

$$\mathcal{L}'(u', u'_{,\mu}) = \mathcal{L}(u', u'_{,\mu}), \quad (2.36)$$

recordando la definición de la *acción*, la invariancia de la funcional S significa la igualdad [32]

$$S' = S. \quad (2.37)$$

Combinando las dos últimas ecuaciones se tiene:

$$\int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}(u', u'_{,\mu}) - \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(u, u_{,\mu}) = 0 \quad (2.38)$$

pero como x es muda

$$\int_{\Omega'} d^4x \mathcal{L}(u', u'_{,\mu}) - \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(u, u_{,\mu}) = 0 \quad (2.39)$$

realizando simbólicamente $\Omega' = \Omega + \delta x$, se puede poner como

$$\int_{\Omega} d^4x [\mathcal{L}(u', u'_{,\mu}) - \mathcal{L}(u, u_{,\mu})] + \int_{\delta x} d^4x \mathcal{L}(u', u'_{,\mu}) = 0 \quad (2.40)$$

que en primer orden se convierte en

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d^4x [\mathcal{L}(u', u'_{,\mu}) - \mathcal{L}(u, u_{,\mu})] + [\delta x \mathcal{L}(u, u_{,\mu})]_{\Gamma(\Omega)} &= 0 \\ \int_{\Omega} d^4x \{ \mathcal{L}(u', u'_{,\mu}) - \mathcal{L}(u, u_{,\mu}) + \partial_{\nu} [\mathcal{L}(u, u_{,\mu}) \delta x^{\nu}] \} &= 0, \end{aligned} \quad (2.41)$$

por la ecuación de transformación (2.33) y recordando que para Lagrangianos dependientes hasta primera derivada de los campos se tiene:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\mu}} \delta u_{,\mu}, \quad (2.42)$$

por lo tanto

$$\mathcal{L}(u', u'_{,\mu}) - \mathcal{L}(u, u_{,\mu}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta_o u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\mu}} \delta_o u_{,\mu}, \quad (2.43)$$

y como se dijo anteriormente que el subíndice \mathbf{o} representa un cambio en un punto fijo puede conmutar con la derivación espacial, por lo tanto, podemos reescribir la anterior ecuación como

$$\mathcal{L}(u', u'_{,\mu}) - \mathcal{L}(u, u_{,\mu}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta_o u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\mu}} \partial_{\mu} \delta_o u \quad (2.44)$$

utilizando la ecuación de Euler-Lagrange para campos (2.31) la anterior ecuación se escribe como

$$\mathcal{L}(u', u'_{,\mu}) - \mathcal{L}(u, u_{,\mu}) = \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\mu}} \right) \delta_o u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\mu}} \partial_{\mu} \delta_o u = \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\mu}} \delta_o u \right), \quad (2.45)$$

reemplazando la ecuación (2.45) en la ecuación (2.41) (por el principio de invariancia) tenemos:

$$\int_{\Omega} d^4x \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\mu}} \delta_o u + \delta x^{\mu} \mathcal{L} \right) = 0 \quad (2.46)$$

en la anterior ecuación podemos ver una ecuación de corriente conservada la cual definiremos como:

$$j^{\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\mu}} \delta_o u + \delta x^{\mu} \mathcal{L}. \quad (2.47)$$

Por lo tanto, el Teorema de Noether (como se coloca en los libros de teoría de campos) se escribe en primer orden como:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \partial_{\mu} j^{\mu} = 0, \quad (2.48)$$

si hacemos el uso del *Teorema de Stokes* [36] la ecuación (2.48) se escribirá en forma de la integral de superficie respecto a la frontera del volumen:

$$\delta S = \int_{\Gamma(\Omega)} d\sigma_{\mu} j^{\mu} = 0. \quad (2.49)$$

Donde $d\sigma_{\mu}$ es la proyección de la hipersuperficie $\Gamma(\Omega)$ que abarca el 4-volumen, sobre la 3-superficie perpendicular al eje x^{μ} .

O colocando en su forma diferencial, la llamada *ley de conservación*

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0. \quad (2.50)$$

Por lo tanto, enunciemos el *Teorema de Noether*: A toda transformación continua de las coordenadas y/o los campos que deje invariante la acción en un volumen cuatridimensional le corresponde una corriente conservada j_{μ} en la evolución que cumple $\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$.

2.3. TENSOR ENERGÍA - MOMENTO

Para poder hallar la expresión de este tensor nos apoyaremos en la ecuación (2.31) considerando solo un campo u para facilitar cálculos, por lo tanto, se tendrá:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0. \quad (2.51)$$

Desarrollemos aparte la siguiente expresión

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\nu}} \frac{\partial u_{,\nu}}{\partial x^{\mu}}. \quad (2.52)$$

Reemplazando (2.51) en (2.52) y observando que $u_{,\nu,\mu} = u_{,\mu,\nu}$ se encuentra

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\nu}} \right) u_{,\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\nu}} \frac{\partial u_{,\mu}}{\partial x^{\nu}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(u_{,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\nu}} \right). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Si escribimos el término izquierdo de la ecuación (2.53) como $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} = \delta_{\mu}^{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\nu}}$, por lo tanto, se tendrá:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\nu}} u_{,\mu} - \delta_{\mu}^{\nu} \mathcal{L} \right) = 0, \quad (2.54)$$

introduciendo la notación

$$T_{\mu}^{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\nu}} u_{,\mu} - \delta_{\mu}^{\nu} \mathcal{L}, \quad (2.55)$$

la expresión (2.55) es denominada *Tensor Canónico Energía - Momento*, como observación señalamos que el índice superior está escrito un poco más a la izquierda que el inferior para dejar sitio para el índice subido al pasar de un tensor mixto a un tensor contravariante (como los índices son mudos hacemos el cambio μ por ν y ν por μ) [19].

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\mu}} u^{,\nu} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.56)$$

Como se mencionó antes hasta el momento se trabajó con un solo campo para hallar la expresión del Tensor Energía - Momento, en el caso que existiera más de un campo la expresión de dicho tensor será la siguiente

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\mu}^A} u^{A,\nu} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.57)$$

donde A pertenece al conjunto de valores de índice.

De (2.54) podemos desprender la ecuación de la continuidad

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (2.58)$$

La ley integral de conservación tiene el aspecto

$$\int T^{0\nu} d^3x = P^\nu, \quad (2.59)$$

donde la integración se lleva a cabo por todo el volumen ocupado por el campo, las magnitudes P^ν son las componentes del cuádrimomento del campo, por lo tanto, sí escribimos:

$$T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,0}^A} u^{A,0} - \mathcal{L} = \mathcal{H}, \quad (2.60)$$

donde el término T^{00} del Tensor Energía - Momento coincide con la densidad de Hamilton del campo, por lo tanto, la integral

$$P^0 = E = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x T^{00} \quad (2.61)$$

determina la energía total del campo, además los términos T^{0k} determina el momento total del campo

$$P^k = \int d^3x T^{0k} = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,0}^A} u^{A,k} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2.62)$$

Hagamos una pequeña observación, si escribimos la corriente de Noether j_μ^A de tal manera que este expresada de la siguiente forma:

$$\bar{j}_\mu^A = j_\mu^A + \partial_\nu \chi_{\mu\nu}^A, \quad (2.63)$$

donde $\chi_{\mu\nu}^A$ es un tensor antisimétrico el cual depende de los campos. Utilizando las propiedades de los tensores tenemos que $\partial_\mu \partial_\nu \chi_{\mu\nu}^A = 0$, por ello la corriente \bar{j}_μ^A también es

una corriente conservada. Siguiendo el mismo razonamiento nosotros podemos escribir el tensor T_ν^μ sin cambiar la corriente conservada de la forma:

$$\bar{T}_\nu^\mu = T_\nu^\mu + \partial_\lambda \Omega_\nu^{\mu\lambda}, \quad (2.64)$$

donde $\Omega_\nu^{\mu\lambda}$ es un tensor antisimétrico con respecto a los índice μ y λ .

Los componentes T^{ij} tienen que ver con las fuerzas que ejercen los elementos infinitesimales del campo sobre otros elementos alrededor. Por ejemplo los elementos diagonales T^{ii} representan las componentes F^i de la fuerza sobre la superficie x^i , es decir, la fuerza F^i en la dirección x^i [17].

Por lo tanto, teniendo en cuenta la *teoría general de relatividad* podemos hallar la *cuadrifuerza* a partir del *cuadrimomento* mediante la siguiente relación

$$\mathcal{F}^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau}, \quad (2.65)$$

donde $d\tau$ es el tiempo propio: $d\tau = (1 - v^2)^{-1/2} dt$ (teniendo en cuenta que estamos trabajando en unidades naturales $c = 1$), entonces a partir de (2.62) la *cuadrifuerza* estará expresada como:

$$\mathcal{F}^\mu = (1 - v^2)^{-1/2} \int \partial_0 T^{0\mu} d^3x. \quad (2.66)$$

Por la ley de conservación del momento lineal:

$$\partial_0 T^{0i} + \partial_k T^{ki} = 0, \quad (2.67)$$

usando la relación (2.67) y reemplazando en la ecuación (2.66), podremos escribir la fuerza como

$$\mathcal{F}^i = -(1 - v^2)^{-1/2} \int \partial_k T^{ki} d^3x, \quad (2.68)$$

utilizando el Teorema de Stokes [36] se tiene:

$$\mathcal{F}^i = -(1 - v^2)^{-1/2} \oint_S T^{ki} dS_k \quad (2.69)$$

la ecuación (2.69) nos ayudara más adelante para hallar la interacción en una dirección deseada (sabiendo que T^{ii} representa la fuerza en la dirección x^i) entre dos solitones el cual es el objetivo principal de este trabajo.

Capítulo 3

VORTICES

3.1. INTRODUCCIÓN

Existen ecuaciones clásicas de movimiento con soluciones muy interesantes que sirve de utilidad para la Física de Partículas que se les llama *objetos extendidos* como son los vórtices, monopolos, instantones. Las cuales son soluciones estables que aparecen solo en Teoría de Campos no lineales las cuales se encuentran en las Teorías de Gauge Abelianas y no Abelianas con o sin ruptura de la simetría [27]. La relevancia de estas soluciones en la Física de Partículas es la de poder describir con cierta aproximación partículas como por ejemplo los bosones.

Como es obvio estas soluciones deben satisfacer las ecuaciones de movimiento dadas por la ecuación de Euler-Lagrange. La estabilidad de estas soluciones se demuestra a través de propiedades topológicas no triviales a las soluciones.

Para nuestro interés en el estudio de esta tesis solo nos interesara las soluciones del tipo vórtice las cuales aparecen en las Teorías de Gauge. La cual fue introducida por H. Nielsen y P. Olensen, los cuales hicieron una analogía entre el modelo fenomenológico de Ginzburg-Landau para la superconductividad tipo II y el modelo relativista de una Teoría Abeliana de Higgs [22]. Las configuraciones de vórtice existen siempre que la simetría de gauge del modelo se rompe espontáneamente vía campos de Higgs dejando al *vacío* invariante bajo un subgrupo H del grupo de simetría de gauge G , luego para tener soluciones estáticas topológicamente estables.

En esta capítulo describiremos algunos resultados ya encontrados de las soluciones tipo vórtice como la ruptura espontanea de la simetría y la estabilidad de estas soluciones usando el Teorema de Derrick en el **Modelo Nielsen-Olsen (M.N.O)**.

3.2. ARGUMENTO DE ESCALA

Conocido también como el *Teorema de Derrick* demuestra que soluciones con energía localizada independiente del tiempo provenientes de una ecuación diferencial no lineal con 3 o mas dimensiones son inestables.

Existe ecuaciones no lineales en una dimensión que presentan soluciones con energía loca-

lizada en un punto del eje x que son estables con respecto a pequeñas deformaciones. Por ello Derrick se hizo la pregunta ¿Existen ecuaciones no lineales de tres dimensiones que presentan soluciones localizadas estables que son estacionarias? Si tales soluciones existen entonces habría una hipótesis interesante que las energías permitidas corresponden a las energías en reposo de las partículas elementales [7], la respuesta a esta pregunta fue *no*, para demostrar dicho teorema de Derrick uso la siguiente ecuación no lineal (usando unidades naturales).

$$\nabla^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{2} f'(u), \quad (3.1)$$

donde $u(\mathbf{r}, \mathbf{t})$ es una función de onda el cual se requiere que este libre de singularidades en todo \mathbf{r} y \mathbf{t} .

La ecuación (3.1) proviene de la siguiente Densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu u)(\partial^\mu u) - f(u) \quad (3.2)$$

$$\mathcal{L} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - (\nabla u)^2 - f(u) \quad (3.3)$$

se probara que dicha ecuación no tiene soluciones localizadas estables independientes del tiempo para ningún $f(u)$. Hay que entender que cuando se habla de una solución *localizada* nos referimos a uno donde las integrales $\int (\nabla u)^2 d^3 \mathbf{x}$ y $\int f(u) d^3 \mathbf{x}$, convergen cuando se integra por todo el espacio [7].

Si u es una función que solo tenga coordenada espacial \mathbf{x} entonces de acuerdo al Tensor Energía - Momento la energía estará dada por

$$E = \int [(\nabla u)^2 + f(u)] d^3 \mathbf{x}. \quad (3.4)$$

Una condición necesaria para que la solución sea estable es que la variación de segundo orden $\delta^2 E \geq 0$. Ahora supongamos que $u(\mathbf{r})$ es una solución localizada de $\delta E = 0$, definiremos $u_\lambda(\mathbf{r}) = u(\lambda \mathbf{r})$ donde λ es una constante arbitraria, entonces la energía estará escrita como

$$E_\lambda = \int [(\nabla u_\lambda)^2 + f(u_\lambda)] d^3 \mathbf{x}, \quad (3.5)$$

hagamos el siguiente cambio de variable

$$\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x},$$

por lo tanto se tendrá que:

$$d^d \mathbf{x} = \lambda^{-d} d\mathbf{y};$$

y además

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \frac{\partial u}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \\ \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \frac{\partial u}{\partial y_i} \lambda. \end{aligned}$$

Volviendo a nuestra funcional de energía haciendo uso del cambio de variable tendremos:

$$E_\lambda = \int \frac{1}{\lambda^3} [(\nabla u_\lambda)^2 + f(u_\lambda)] d^3(\mathbf{y}) \quad (3.6)$$

$$E_\lambda = \int \frac{1}{\lambda^3} [\lambda^2 (\nabla u_\lambda)^2 + f(u_\lambda)] d^3(\mathbf{y}) \quad (3.7)$$

$$E_\lambda = \frac{I_A}{\lambda} + \frac{I_B}{\lambda^3}, \quad (3.8)$$

donde $I_A = \int (\nabla u)^2 d^3\mathbf{y}$ y $I_B = \int f(u) d^3\mathbf{y}$, por lo tanto tenemos que:

$$\left(\frac{dE_\lambda}{d\lambda} \right)_{\lambda=1} = -I_A - 3I_B, \quad (3.9)$$

$$\left(\frac{d^2E_\lambda}{d\lambda^2} \right)_{\lambda=1} = 2I_A + 12I_B. \quad (3.10)$$

Como u_λ es una solución de $\delta E = 0$ para $\lambda = 1$, tendremos

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE_\lambda}{d\lambda} \right)_{\lambda=1} &= 0, \quad \text{entonces} \quad I_B = -\frac{1}{3}I_A, \\ \left(\frac{d^2E_\lambda}{d\lambda^2} \right)_{\lambda=1} &= -2I_A < 0. \end{aligned}$$

Como $\delta^2 E < 0$ por una variación correspondiente a una partícula; por consiguiente, la solución $u(\mathbf{r})$ es inestable, lo que demuestra el teorema.

3.3. RUPTURA ESPONTANEA DE LA SIMETRÍA

La ruptura espontánea de la simetría es un fenómeno que ocurre en sistemas que presentan una Densidad Lagrangiana que lo describe el cual es *invariante* con respecto a un grupo de simetría y presenta uno o varios estados fundamentales (vacío) degenerados [3]. Esta ruptura de simetría ocurre cuando nosotros elegimos un estado del vacío el cual *no es invariante* al grupo de simetría [21].

Para poder ver como se rompe la simetría en un sistema físico vamos a considerar la siguiente Densidad Lagrangiana con un solo campo escalar

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \psi)(\partial^\mu \psi) - \frac{m^2}{2}\psi^2 - \frac{\lambda}{4}\psi^4, \quad (3.11)$$

podemos ver que esta Densidad Lagrangiana es invariante bajo la transformación

$$\psi(x) \rightarrow -\psi(x), \quad (3.12)$$

el cual es la simetría discreta del modelo. Para hallar el funcional de la energía E para este modelo haremos uso del Tensor Energía - Momento (ecuación (2.60))

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,0}} \psi_{,0} - \mathcal{L} \\ &= (\partial^0 \psi)^2 - \left[\frac{1}{2}(\partial^0 \psi)^2 - \frac{1}{2}(\partial^i \psi)^2 - \frac{m^2}{2}\psi^2 - \frac{\lambda}{4}\psi^4 \right] \\ &= \frac{1}{2}(\partial^0 \psi)^2 + \frac{1}{2}(\partial^i \psi)^2 + \frac{m^2}{2}\psi^2 + \frac{\lambda}{4}\psi^4, \end{aligned} \quad (3.13)$$

por lo tanto la funcional energía estará determinada por la integral:

$$E = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\partial^0\psi)^2 + \frac{1}{2}(\partial^i\psi)^2 + \frac{m^2}{2}\psi^2 + \frac{\lambda}{4}\psi^4 \right]. \quad (3.14)$$

Para que esta energía este limitada y haya soluciones estable haremos uso del Teorema de Derrick (sección 3.2), por lo tanto haremos el reescaleo

$$y = \omega x,$$

teniendo en cuenta que ψ solo dependerá de x , entonces la funcional de energía sera escrita como

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \int d^3y \omega^{-3} \left[\frac{\omega^2}{2}(\partial^i\psi_\omega)^2 + \frac{m^2}{2}\psi_\omega^2 + \frac{\lambda}{4}\psi_\omega^4 \right] \\ &= \int d^3y \left[\frac{\omega^{-1}}{2}(\partial^i\psi_\omega)^2 + \frac{m^2\omega^{-3}}{2}\psi_\omega^2 + \frac{\lambda\omega^{-3}}{4}\psi_\omega^4 \right] \\ &= \omega^{-1}I_1 + \omega^{-3}I_2; \end{aligned}$$

donde $I_1 = \int d^3y (\partial^i\psi)^2$ y $I_2 = \int d^3y (\frac{m^2}{2}\psi^2 + \frac{\lambda}{4}\psi^4)$, entonces tendremos que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE(\omega)}{d\omega} \right)_{\omega=1} &= -I_1 - 3I_2, \\ \left(\frac{d^2E(\omega)}{d\omega^2} \right)_{\omega=1} &= 2I_1 + 12I_2. \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de Derrick el cual dice que para tener soluciones estables y localizadas se tiene que cumplir que $\delta E = 0$ y $\delta^2 E > 0$, tendremos

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE(\omega)}{d\omega} \right)_{\omega=1} = 0 &\quad \text{entonces} \quad I_1 = -3I_2; \\ \left(\frac{d^2E(\omega)}{d\omega^2} \right)_{\omega=1} &= 6I_2 > 0. \end{aligned}$$

De acuerdo al teorema de Derrick esta seria la conclusión para obtener soluciones estables, es mas para obtener mínimos de energía es necesario que:

$$\lambda > 0.$$

Como se puede ver, para el caso $\lambda = 0$ es trivial y por lo tanto no lo consideraremos, pero hasta ahora no hay ninguna restricción para el parámetro m^2 . Ahora encontraremos el *estado fundamental* del modelo, es decir hay que hallar la configuración del campo $\psi(x)$ con energía mínima. De (3.14) podemos inferir que la energía mínima se hallara cuando el campo sea estacionario es decir

$$\partial_0\psi(x, t) = 0 \quad (3.15)$$

y ademas cuando el campo sea homogéneo en el espacio:

$$\partial_i\psi(x, t) = 0. \quad (3.16)$$

Entonces de (3.15) y (3.16) podemos concluir que:

$$\psi = \text{cte.}$$

Entonces la energía sera mínima cuando la siguiente expresión el cual la llamaremos como el potencial también sea mínimo

$$V(\psi) = \frac{m^2}{2}\psi^2 + \frac{\lambda}{4}\psi^4, \quad (3.17)$$

por lo tanto con la regla de la primera derivada podremos hallar los mínimos de (3.17)

$$\frac{dV}{d\psi} = \psi(m^2 + \lambda\psi^2), \quad (3.18)$$

igualando a cero para hallar los mínimos

$$\psi(m^2 + \lambda\psi^2) = 0, \quad (3.19)$$

de (3.19), se ve que existe dos casos $m^2 \geq 0$ y $m^2 < 0$ para poder hallar los mínimos, analizamos el primer caso.

1. Para $m^2 \geq 0$, el potencial sera mínimo cuando

$$\psi = 0.$$

Podemos ver que este estado es invariante a la transformación (3.12); por ello diremos que el *estado fundamental* no rompe la simetría del modelo. Esto es debido a que las perturbaciones sobre el estado fundamental son descritos en si mismo por el campo ψ , y como en este caso estas perturbaciones coincide con la Densidad Lagrangiana (3.11) y es invariante bajo la simetría discreta [29].

2. Para $m^2 < 0$, el potencial tendrá la forma presentada en la figura 3.1. Observamos que para $\psi = 0$ el cual es simétrico a la transformación (3.12) corresponde al máximo del potencial y sus dos estados fundamentales (mínimos) están dados por:

$$\psi_0 = \pm \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{donde} \quad \mu^2 = -m^2, \quad (3.20)$$

por ende $\mu > 0$.

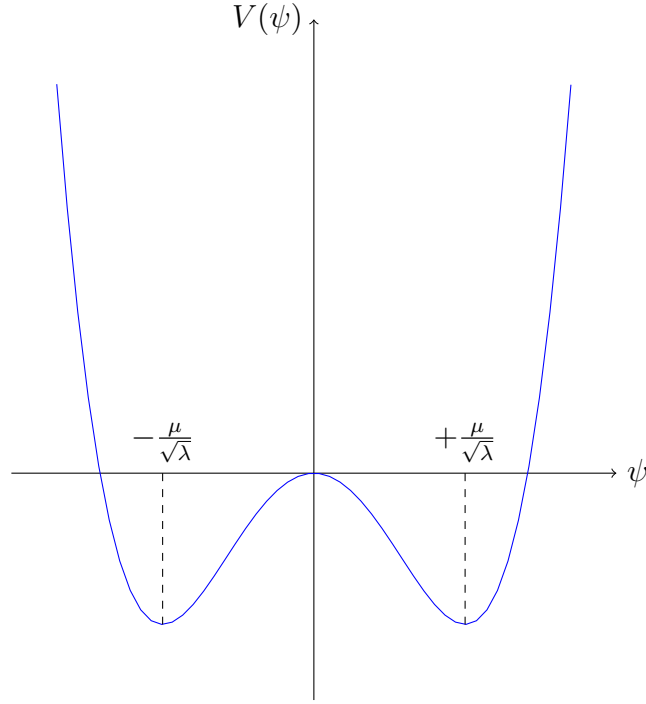


Figura 3.1: Gráfica del potencial (3.17) el cual presenta dos vacíos degenerados.

Interpretemos lo que significa que un sistema este en un estado fundamental. Si nosotros quitamos toda la energía disponible del campo nosotros nos encontraremos en uno de los estados fundamentales $\psi = \pm\psi_0$. Para “transferir” el campo de un estado fundamental a otro, uno tiene que añadir una energía proporcional al volumen del espacio, no olvidemos que $V(\psi)$ es la densidad de energía de un campo homogéneo [29].

Por ello la energía potencial del campo homogéneo ψ sera igual a $\Lambda V(\psi)$, donde Λ sera el volumen total del espacio. Ahora si nosotros consideramos un espacio muy extenso es decir $\Lambda \rightarrow \infty$; nosotros debemos elegir uno de los estados fundamentales y considerar las perturbaciones alrededor de el, nuestra elección sera:

$$\psi = \psi_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}. \quad (3.21)$$

Podemos ver que este estado es *no invariante* bajo la transformación (3.12), por lo tanto, la simetría es rota espontáneamente; hallemos la energía en el estado fundamental:

$$\begin{aligned} V(\psi_0) &= \frac{m^2}{2}\psi_0^2 + \frac{\lambda}{4}\psi_0^4 \\ &= \frac{m^2}{2}\left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 + \frac{\lambda}{4}\left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\right)^4 \\ &= -\frac{\mu^4}{2\lambda} + \frac{\mu^4}{4\lambda} \\ &= -\frac{\mu^4}{4\lambda}, \\ E_0 &= \Lambda V(\psi_0) \\ &= -\Lambda \frac{\mu^4}{4\lambda}. \end{aligned}$$

Ahora modificaremos nuestra Densidad Lagrangiana (3.11) de tal manera que se puede apreciar el estado fundamental en dicha expresión, pero teniendo en cuenta que al hacer esta modificación no cambiaremos las ecuaciones de movimiento, para ello solo añadiremos una constante a dicha Densidad Lagrangiana:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\psi)(\partial^\mu\psi) + \frac{\mu^2}{2}\psi^2 - \frac{\lambda}{4}\psi^4 - \frac{\mu^4}{4\lambda} \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\psi)(\partial^\mu\psi) - \frac{\lambda}{4}\left(\psi^4 - 2\frac{\mu^2}{\lambda}\psi^2 + \frac{\mu^4}{\lambda^2}\right)\end{aligned}$$

pero $\psi_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\psi)(\partial^\mu\psi) - \frac{\lambda}{4}(\psi^4 - 2\psi^2\psi_0^2 + \psi_0^4) \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\psi)(\partial^\mu\psi) - \frac{\lambda}{4}(\psi^2 - \psi_0^2)^2;\end{aligned}\tag{3.22}$$

y con un potencial igual a:

$$V(\psi) = \frac{\lambda}{4}(\psi^2 - \psi_0^2)^2\tag{3.23}$$

3.4. ESTABILIDAD EN EL MODELO NIELSEN-OLENSEN

A continuación presentamos una teoría gauge el cual fue planteado por Nielsen - Olesen como un modelo en (2+1) dimensiones, dicho modelo presenta soluciones tipo vórtices y además es simétrico a las transformaciones gauge; la Densidad Lagrangiana de este modelo es escrito como [22]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}|D_\mu\phi|^2 + c_2|\phi|^2 - c_4|\phi|^4;\tag{3.24}$$

donde c_2 y c_4 son constantes reales y $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$, además ϕ es un campo escalar complejo (cargado)

$$\phi = f(r)e^{i\omega(r)},\tag{3.25}$$

A_μ un campo de gauge y $F_{\mu\nu}$ el tensor de campo electromagnético

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.\tag{3.26}$$

La Densidad Lagrangiana (3.24) es invariante al siguiente grupo de transformaciones gauge:

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\Lambda(\mathbf{x})}\phi\tag{3.27}$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(\mathbf{x}),\tag{3.28}$$

además dicha Densidad Lagrangiana presenta un potencial $V(|\phi|)$ de la forma

$$V(|\phi|) = -c_2|\phi|^2 + c_4|\phi|^4.\tag{3.29}$$

Ahora para poder tener soluciones localizadas y estables en esta teoría debemos primero hallar el funcional de energía asociado para este modelo, pero antes de ello hallemos la ecuación de campo del modelo con respecto al campo A_ν el cual nos ayudara para encontrar la expresión del tensor T_ν^μ , utilizando la ecuación de Euler - Lagrange encontramos que dicha ecuación es:

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = \frac{ie}{2}[(D_\mu\phi)\phi^* - (D_\mu\phi)^*\phi], \quad (3.30)$$

el desarrollo de la ecuación (3.30) se encuentra en el **Apéndice 8.1**.

El funcional de energía se deriva del Tensor Energía - Momento, entonces para el Modelo Nielsen - Olensen se tendrá que (teniendo en cuenta que los campos son ϕ , ϕ^* , A^α):

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\partial_\nu\phi^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\alpha)}\partial_\nu A^\alpha - \delta_\nu^\mu\mathcal{L},$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} &= \frac{1}{2}(D^\mu\phi)^*, \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} &= \frac{1}{2}(D^\mu\phi), \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\alpha)} &= -(\partial^\mu A_\alpha - \partial_\alpha A^\mu) = -g_{\alpha\beta}(\partial^\mu A^\beta - \partial^\beta A^\mu) = -g_{\alpha\beta}F^{\mu\beta}; \end{aligned}$$

entonces:

$$T_\nu^\mu = \frac{1}{2}(D^\mu\phi)^*\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}(D^\mu\phi)\partial_\nu\phi^* - g_{\alpha\beta}F^{\mu\beta}\partial_\nu A^\alpha - \delta_\nu^\mu\mathcal{L}.$$

Antes de desarrollar esta expresión debemos agregar un tensor antisimétrico a T_ν^μ , de acuerdo a la ecuación (2.64), para así obtener una expresión mas cómoda para nosotros, entonces reescribiremos T_ν^μ como:

$$T_\nu^\mu = \frac{1}{2}(D^\mu\phi)^*\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}(D^\mu\phi)\partial_\nu\phi^* - g_{\alpha\beta}F^{\mu\beta}\partial_\nu A^\alpha + \partial_\beta(F^{\mu\beta}A_\nu) - \delta_\nu^\mu\mathcal{L}.$$

Notamos que el término $F^{\mu\beta}A_\nu$ es un tensor antisimétrico con respecto a los índices μ y β por lo cual esta conforme a la ecuación (2.64) y por lo tanto la corriente conservada no se alterara al añadir este término, ahora desarrollemos la expresión T_ν^μ :

$$\begin{aligned} T_\nu^\mu &= \frac{1}{2}(D^\mu\phi)^*(\partial_\nu\phi - ieA_\nu\phi + ieA_\nu\phi) + \frac{1}{2}(D^\mu\phi)(\partial_\nu\phi^* + ieA_\nu\phi^* - ieA_\nu\phi^*) - F^{\mu\beta}\partial_\nu A_\beta \\ &\quad + \partial_\beta(F^{\mu\beta}A_\nu) - \delta_\nu^\mu\mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}(D^\mu\phi)^*[(D_\nu\phi) + ieA_\nu\phi] + \frac{1}{2}(D^\mu\phi)[(D_\nu\phi)^* - ieA_\nu\phi^*] - F^{\mu\beta}(\partial_\nu A_\beta - \partial_\beta A_\nu + \partial_\beta A_\nu) \\ &\quad + \partial_\beta(F^{\mu\beta}A_\nu) - \delta_\nu^\mu\mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}[(D^\mu\phi)^*(D_\nu\phi) + (D^\mu\phi)(D_\nu\phi)^*] - \frac{ie}{2}[(D^\mu\phi)\phi^* - (D^\mu\phi)^*\phi]A_\nu - F^{\mu\beta}F_{\nu\beta} - F^{\mu\beta}\partial_\beta A_\nu \\ &\quad + \partial_\beta(F^{\mu\beta}A_\nu) - \delta_\nu^\mu\mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}[(D^\mu\phi)^*(D_\nu\phi) + (D^\mu\phi)(D_\nu\phi)^*] - \frac{ie}{2}[(D^\mu\phi)\phi^* - (D^\mu\phi)^*\phi]A_\nu - F^{\mu\beta}F_{\nu\beta} + \partial_\beta(F^{\mu\beta}A_\nu) \\ &\quad - \delta_\nu^\mu\mathcal{L}. \end{aligned}$$

Vemos que el segundo término de la expresión T_ν^μ según la ecuación (3.30) es la misma que la expresión $\partial_\beta(F^{\mu\beta})$ pero con signo cambiado, entonces se tendrá que:

$$\begin{aligned} T_\nu^\mu &= \frac{1}{2}[(D^\mu\phi)^*(D_\nu\phi) + (D^\mu\phi)(D_\nu\phi)^*] - \partial_\beta(F^{\mu\beta})A_\nu - F^{\mu\beta}F_{\nu\beta} + \partial_\beta(F^{\mu\beta})A_\nu - \delta_\nu^\mu\mathcal{L} \\ T_\nu^\mu &= \frac{1}{2}[(D^\mu\phi)^*(D_\nu\phi) + (D^\mu\phi)(D_\nu\phi)^*] - F^{\mu\beta}F_{\nu\beta} - \delta_\nu^\mu\mathcal{L}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Hallemos el término T_0^0 :

$$\begin{aligned} T_0^0 &= (D^0\phi)^*(D_0\phi) - F^{0\beta}F_{0\beta} + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(D^\mu\phi)^*(D_\mu\phi) + V(|\phi|) \\ &= (D^0\phi)^*(D_0\phi) - F^{0i}F_{0i} + \frac{1}{4}(F^{0i}F_{0i} + F^{i0}F_{i0} + F^{ij}F_{ij}) - \frac{1}{2}(D^0\phi)^*(D_0\phi) \\ &\quad - \frac{1}{2}(D^i\phi)^*(D_i\phi) + V(|\phi|), \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $F^{0i} = -F^{i0}$, entonces

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \frac{1}{2}(D^0\phi)^*(D_0\phi) - F^{0i}F_{0i} + \frac{1}{4}(2F^{0i}F_{0i} + F^{ij}F_{ij}) - \frac{1}{2}(D^i\phi)^*(D_i\phi) + V(|\phi|) \\ T^{00} &= \frac{1}{2}(D^0\phi)^*(D^0\phi) + (F^{0i})^2 - \frac{1}{2}(F^{0i})^2 + \frac{1}{4}(F^{ij})^2 + \frac{1}{2}(D^i\phi)^*(D^i\phi) + V(|\phi|) \\ T^{00} &= \frac{1}{2}(F^{0i})^2 + \frac{1}{4}(F^{ij})^2 + \frac{1}{2}(D^0\phi)^*(D^0\phi) + \frac{1}{2}(D^i\phi)^*(D^i\phi) + V(|\phi|). \end{aligned}$$

Como sabemos el término T^{00} representa la densidad de energía, por lo tanto la funcional de energía estara dada por:

$$\begin{aligned} E(\phi, A_\mu) &= \int d^2\mathbf{x} \left[\frac{1}{2}(F^{0i})^2 + \frac{1}{4}(F^{ij})^2 + \frac{1}{2}(D^0\phi)^*(D^0\phi) + \frac{1}{2}(D^i\phi)^*(D^i\phi) \right. \\ &\quad \left. + V(|\phi|) \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

Para garantizar que esta energía sea finita localizada y halla soluciones estables tenemos que hacer uso del argumento de escala o simplemente realizar el reescalo de los campos. Antes de realizar dicho reescalo nosotros vamos a considerar campos que no dependen del tiempo y con el campo gauge $A_0 = 0$, es decir nosotros estamos interesados en la configuración de campos en la cual se tiene que

$$F_{0i} = 0, \quad (3.33)$$

$$D_0\phi = 0. \quad (3.34)$$

Como vemos estas dos ecuaciones son invariantes de gauge, teniendo en cuenta esto nuestra funcional de energía sera escrita como:

$$E(\phi, \bar{A}) = \int d^2\mathbf{x} \left[\frac{1}{4}(F^{ij})^2 + \frac{1}{2}(D^i\phi)^*(D^i\phi) + V(|\phi|) \right] \quad (3.35)$$

El reescalo de los campos sera escrito como:

$$\begin{aligned} \phi_\lambda(\mathbf{x}) &= \phi(\lambda\mathbf{x}), \\ \bar{A}_\lambda(\mathbf{x}) &= \lambda\bar{A}(\lambda\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Entonces, haciendo nuestro cambio de variable $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$ la funcional de energía se reescribirá como:

$$E_\lambda(\phi_\lambda, \bar{A}_\lambda) = \int \lambda^{-2} d^2 \mathbf{y} \left[\frac{1}{4} (F^{ij})_\lambda^2 + \frac{1}{2} (D^i \phi_\lambda)^* (D^i \phi_\lambda) + V(|\phi_\lambda|) \right],$$

vemos que :

$$\begin{aligned} (F^{ij})_\lambda &= \partial^i A_\lambda^j - \partial^j A_\lambda^i = \lambda^2 (\partial^i A^j - \partial^j A^i) = \lambda^2 F^{ij} \\ D^i \phi_\lambda &= \partial^i \phi - ie A_\lambda^i \phi_\lambda = \lambda (\partial^i \phi - ie A^i \phi) = \lambda D^i \phi. \end{aligned}$$

Entonces, en la funcional de energía se tendrá:

$$\begin{aligned} E_\lambda(\phi_\lambda, \bar{A}_\lambda) &= \int \lambda^{-2} d^2 \mathbf{y} \left[\frac{\lambda^4}{4} (F^{ij})^2 + \frac{\lambda^2}{2} (D^i \phi)^* (D^i \phi) + V(|\phi|) \right] \\ E_\lambda(\phi_\lambda, \bar{A}_\lambda) &= \int d^2 \mathbf{y} \left[\frac{\lambda^2}{4} (F^{ij})^2 + \frac{1}{2} (D^i \phi)^* (D^i \phi) + \lambda^{-2} V(|\phi|) \right] \end{aligned}$$

sea:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int d^2 \mathbf{y} \frac{1}{4} (F^{ij})^2 && \implies \text{contribución del campo gauge,} \\ I_2 &= \int d^2 \mathbf{y} (D^i \phi)^* (D^i \phi) && \implies \text{contribución de la derivada covariante,} \\ I_3 &= \int d^2 \mathbf{y} V(|\phi|) && \implies \text{contribución del potencial;} \end{aligned}$$

entonces:

$$E_\lambda(\phi_\lambda, \bar{A}_\lambda) = \lambda^2 I_1 + I_2 + \lambda^{-2} I_3, \quad (3.36)$$

por lo tanto, tendremos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE_\lambda}{d\lambda} \right)_{\lambda=1} &= 2I_1 - 2I_3, \\ \left(\frac{d^2 E_\lambda}{d\lambda^2} \right)_{\lambda=1} &= 2I_1 + 6I_3. \end{aligned}$$

Aplicamos el teorema de Derrick ($\delta E = 0$ y $\delta^2 E > 0$), tenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE_\lambda}{d\lambda} \right)_{\lambda=1} &= 0 \quad \text{entonces} \quad I_1 = I_3; \\ \left(\frac{d^2 E_\lambda}{d\lambda^2} \right)_{\lambda=1} &= 8I_3 > 0. \end{aligned}$$

Lo cual sería la condición necesaria para poder tener soluciones estables.

3.5. RUPTURA ESPONTANEA DE LA SIMETRÍA EN EL M.N.O

Como se realizó en la sección (3.3) nosotros debemos encontrar el estado fundamental del modelo, por lo tanto hallaremos la configuración de campo ϕ con energía mínima, por

ello debemos encontrar los mínimos del potencial $V(|\phi|)$; entonces, usando la regla de la primera derivada tenemos que:

$$\frac{dV}{d\phi} = \phi^* (-c_2 + 2c_4|\phi|^2) = 0; \quad (3.37)$$

como nuestra intención es encontrar los mínimos de energía, es decir el potencial $V(|\phi|)$ debe de tener mínimos por ende:

$$c_4 > 0.$$

La solución trivial de (3.37) para encontrar los mínimos del potencial es

$$\phi_0 = \phi_0^* = 0. \quad (3.38)$$

Podemos ver que para este estado es invariante a las transformaciones gauge, por lo tanto para este caso no se rompe la simetría del modelo.

Como se menciono antes, debe existir un estado de energía mínima finita, por ello, c_4 debe ser siempre positiva, entonces sera el signo de c_2 que determinara que si el potencial tenga o no un mínimo trivial; analicemos los casos $c_2 < 0$ y $c_2 \geq 0$.

$$|\phi_0|^2 = \frac{c_2}{2c_4}. \quad (3.39)$$

1. Para $c_2 < 0$, vemos que el mínimo de la energía seria la solución trivial porque de acuerdo a (3.37) el termino $(-c_2 + 2c_4|\phi|^2) > 0$ y la gráfica del potencial $V(|\phi|)$ vs $|\phi|$ se muestra en la figura 3.2.

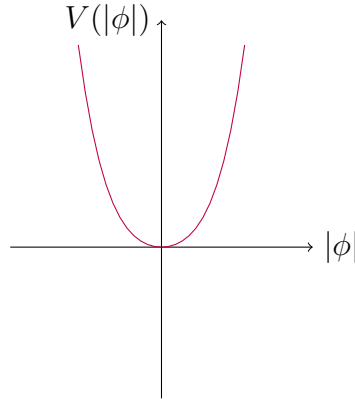


Figura 3.2: Gráfica del potencial $V(|\phi|)$ para $c_2 < 0$.

Por lo tanto, para este caso el estado fundamental o estado de vacío que minimiza la energía es cuando $\phi_0 = 0$, entonces diremos que la configuración

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 0 \\ A_\mu &= 0 \end{aligned}$$

corresponde al vacío. vemos que este estado fundamental o vacío es invariante a las transformaciones gauge (3.27) y (3.28)

$$\begin{aligned} \phi'_0 &= \phi_0 = 0 \\ A'_\mu &= A_\mu = 0 \end{aligned}$$

en otras palabras, la configuración del vacío tiene la misma simetría que la Densidad Lagrangiana (3.24), por ello la simetría no se rompe.

2. Para $c_2 > 0$, tenemos:

$$|\phi_0| = \pm \sqrt{\frac{c_2}{2c_4}},$$

es decir, que existe dos estados fundamentales (degenerados). Como ϕ es un campo escalar complejo la gráfica de $V(|\phi|)$ sería una figura en 3-dimensiones conocido popularmente como *sombrero mexicano*, para comprender mejor la forma de esta potencial se bosquejará la gráfica $V(\phi)$ vs $|\phi|$ el cual se presenta en la figura 3.3.

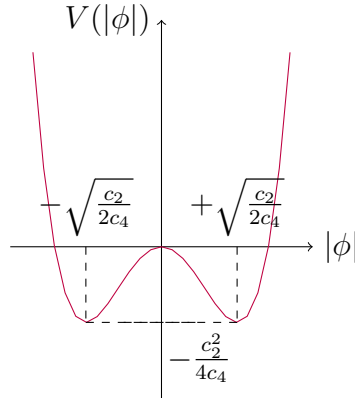


Figura 3.3: Gráfica del potencial $V(|\phi|)$ para $c_2 > 0$.

A diferencia del caso anterior vemos que $\phi = 0$ no es la configuración del vacío, en este caso el mínimo se encuentra si cumple la condición

$$|\phi_0|^2 = \frac{c_2}{2c_4} = \eta^2. \quad (3.40)$$

Por lo tanto, nosotros podemos encontrar un infinito de mínimos posibles de la forma:

$$\phi_0 = \eta e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (3.41)$$

Ahora elegimos un posible vacío con $\theta = \vartheta$ Si aplicamos la transformación (3.27) a este vacío tenemos:

$$\phi'_0 = \eta e^{i(\vartheta+\Lambda)} \quad (3.42)$$

Vemos que este estado ya no es invariante de gauge, por lo tanto, la simetría de la Densidad Lagrangiana que define el modelo se rompió.

Cambiamos un poco la Densidad Lagrangiana de modo que podemos apreciar el estado del vacío, para ello añadiremos una constante a la expresión el cual no modifica las ecuaciones de campo, entonces tendremos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}|D_\mu\phi|^2 + c_2|\phi|^2 - c_4|\phi|^4 - \frac{c_2^2}{4c_4}; \\ \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}|D_\mu\phi|^2 - c_4 \left[|\phi|^4 - 2 \left(\frac{c_2}{2c_4} |\phi|^2 \right) + \frac{c_2^2}{4c_4^2} \right] \\ \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}|D_\mu\phi|^2 - c_4 \left(|\phi|^2 - \frac{c_2}{2c_4} \right)^2; \end{aligned}$$

si escribimos que $c_4 = \lambda/4$ (para estar de acuerdo con la referencia), la Densidad Lagrangiana se escribirá como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D^\mu\phi)^*(D_\mu\phi) - \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - \eta^2)^2, \quad (3.43)$$

y con un potencial

$$V(|\phi|) = \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - \eta^2)^2. \quad (3.44)$$

Las ecuaciones de campo utilizando la ecuación de Euler - Lagrange con respecto a la Densidad Lagrangiana (3.43) son:

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = \frac{ie}{2}[(D_\mu\phi)\phi^* - (D_\mu\phi)^*\phi] \quad (3.45)$$

$$(D_\mu^*)^2\phi^* = -\lambda\phi^*(|\phi|^2 - \eta^2) \quad (3.46)$$

$$(D_\mu)^2\phi = -\lambda\phi(|\phi|^2 - \eta^2), \quad (3.47)$$

el desarrollo que con lleva a estas ecuaciones están desarrolladas en el **Apellido 8.1, 8.2 y 8.3** respectivamente.

3.6. MECANISMO DE HIGGS EN EL MODELO NIELSEN - OLESEN

En esta sección discutiremos el Mecanismo de Higgs aplicado a un modelo Abeliano como es el caso del Modelo de Nielsen - Olesen, primero encontremos la configuración de los campos A_μ y ϕ para el estado fundamental.

Analicemos la funcional de energía (3.32), como la funcional $E(\phi, A_\mu)$ es invariante gauge, por lo tanto, si $(\phi_0, A_\mu^{(0)})$ es un estado fundamental, entonces $(e^{i\Lambda(\mathbf{x})}\phi_0, A_\mu^{(0)} - \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(\mathbf{x}))$ también lo será.

De la integral (3.32) vemos que para que los términos primero y segundo sean mínimos el tensor $F_{\mu\nu}$ debe ser cero, para ello es necesario que el campo A_μ sea un campo gauge puro, es decir:

$$A_\mu = \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(\mathbf{x}), \quad (3.48)$$

por lo tanto, la derivada covariante se convertirá en $D_\mu = \partial_\mu - i\partial_\mu\Lambda(\mathbf{x})$, entonces los términos tercero y cuarto de (3.32) sera mínimo cuando $D_\mu\phi = 0$, es decir:

$$(\partial_\mu - i\partial_\mu\Lambda(\mathbf{x}))\phi = 0,$$

entonces

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi_0 e^{i\Lambda(\mathbf{x})}.$$

Donde ϕ_0 es el vacío (ver (3.41)), vamos a elegir el vacío como $\phi_0 = \eta$, entonces;

$$\phi(\mathbf{x}) = \eta e^{i\Lambda(\mathbf{x})}. \quad (3.49)$$

Como vemos todos los posibles estados fundamentales están determinados por las ecuaciones (3.48) y (3.49), ahora debemos de elegir uno de los tantos estados fundamentales

que existe. Vamos a elegir el caso cuando $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$, por lo tanto la configuración de los campos para el estado fundamental estará dado por

$$\begin{aligned} A_\mu^{(0)} &= 0, \\ \phi_0 &= \eta. \end{aligned}$$

Ahora vamos a considerar pequeñas perturbaciones alrededor del estado fundamental. Donde las perturbaciones del campo A_μ serán descritos por el mismo potencial vectorial en si mismo y las perturbaciones del campo escalar $\phi(\mathbf{x})$ serán descritos por dos campos $\chi(\mathbf{x})$ y $\Pi(\mathbf{x})$, por lo tanto el campo escalar sera escrito como:

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi_0 + \chi(\mathbf{x}) + i\Pi(\mathbf{x}). \quad (3.50)$$

Teniendo en cuenta estas perturbaciones debemos de encontrar la nueva Densidad Lagrangiana considerando estos cambios, es decir encontrar el espectro de estas ondas pequeñas alrededor del estado fundamental, por lo tanto, debemos de introducir (3.50) en la Densidad Lagrangiano (3.43), para calcular esta expresión vamos a considerar los campos A_μ , χ y Π solo hasta el orden 2, entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}[\partial^\mu(\phi_0 + \chi - i\Pi) + ieA^\mu(\phi_0 + \chi - i\Pi)][\partial_\mu(\phi_0 + \chi + i\Pi) - ieA_\mu(\phi_0 + \chi + i\Pi)] \\ &\quad + \frac{\lambda}{4}[(\phi_0 + \chi)^2 + \Pi^2 - \eta^2]^2 \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}[\partial^\mu\chi - i(\partial^\mu\Pi - eA^\mu\phi_0)][\partial_\mu\chi + i(\partial_\mu\Pi - eA_\mu\phi_0)] - \frac{\lambda}{4}[(\phi_0 + \chi)^2 + \Pi^2 - \eta^2]^2 \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}[(\partial_\mu\chi)^2 + (\partial_\mu\Pi - eA_\mu\phi_0)^2] - \frac{\lambda}{4}(\phi_0^2 + 2\phi_0\chi + \chi^2 + \Pi^2 - \eta^2)^2 \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\chi)^2 + e^2\eta^2\left(A_\mu - \frac{1}{e\eta}\partial_\mu\Pi\right)^2\right] - \frac{\lambda}{4}(2\eta\chi + \chi^2 + \Pi^2)^2 \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\chi)^2 + e^2\eta^2\left(A_\mu - \frac{1}{e\eta}\partial_\mu\Pi\right)^2\right] - \frac{\lambda}{4}[4\eta^2\chi^2 + \chi^4 + \Pi^4 + \\ &\quad 2(2\eta\chi^3 + 2\eta\chi\Pi^2 + \chi^2\Pi^2)], \end{aligned}$$

considerando solo perturbaciones hasta de orden 2, se tendrá:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 + \frac{e^2\eta^2}{2}\left(A_\mu - \frac{1}{e\eta}\partial_\mu\Pi\right)^2 - \lambda\eta^2\chi^2.$$

Si llamamos

$$B_\mu = A_\mu + \frac{1}{e\eta}\partial_\mu\Pi,$$

y

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \\ G_{\mu\nu} &= \partial_\mu\left(A_\nu - \frac{1}{e\eta}\partial_\nu\Pi\right) - \partial_\nu\left(A_\mu - \frac{1}{e\eta}\partial_\mu\Pi\right) \\ G_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ G_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

entonces, la Densidad Lagrangiana se reescribirá como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 + \frac{e^2\eta^2}{2}(B_\mu)^2 - \lambda\eta^2\chi^2. \quad (3.51)$$

La idea fundamental del Mecanismo de Higgs consiste en el modo en que los campos gauge adquieren masa, dicha idea fue planteada por Peter W. Higgs en 1964 como una idea que cuestiona el *Teorema de Goldstone* el cual dice que en teorías de campo en el cual se rompe la simetría bajo un grupo de Lie contiene partículas de masa cero, pero esta idea falla cuando este grupo esta acoplado a campos gauge, donde dichos campos adquieren masa [14].

Sea obtenido la nueva Densidad Lagrangiana (3.51) que es la suma de la Densidad Lagrangiana del campo vectorial B_μ y de la Densidad Lagrangiana del campo escalar χ , donde los coeficientes que acompañan a los términos $(B_\mu)^2$ y χ^2 tiene un significado físico de *masa* de dichos campos es decir tiene la forma

$$\frac{1}{2} \cdot m^2 \cdot (\text{campo})^2,$$

por ello, la masa del campo vectorial B_μ es

$$m_A^2 = e^2\eta^2, \quad (3.52)$$

y la masa del campo escalar χ es igual a

$$m_H^2 = 2\lambda\eta^2. \quad (3.53)$$

Realicemos una observación, vemos que el campo $\Pi(\mathbf{x})$ no aparece en la Densidad Lagrangiana (3.51) entonces dicho campo no satisface ninguna ecuación de campo, lo interesante de la desaparición del campo $\Pi(\mathbf{x})$ es la aparición de la masa del campo vectorial. El campo $\Pi(\mathbf{x})$ es el campo *Nambu-Goldstone* y la partícula correspondiente a dicho campo es el *bosón de Nambu-Goldstone* si fuera una simetría global, donde dichos bosones según el Teorema de Goldstone tienen una masa igual a cero [12].

Pero en este caso nuestro modelo no presenta una simetría global sino una simetría gauge, donde vemos que el campo vectorial B_μ a “absorbido” un campo de Nambu-Goldstone y ha adquirido una masa caso contrario a lo que ocurría en el Teorema de Goldstone.

Vemos que además del campo vectorial B_μ , el espectro de las perturbaciones incluye al campo escalar χ a este campo escalar se le llama el campo de Higgs donde se aplica a todo el campo escalar $\phi(\mathbf{x})$ cuyo valor de vacío es no trivial y su partícula correspondiente es el llamado “*Boson de Higgs*”.

Capítulo 4

INTERACCIÓN DE SOLITONES ESCALARES

Como se menciono las soluciones de algunos modelos no lineales presentan una solución de tipo solitón. En este capítulo se hallara la interacción de dos solitones que son las soluciones asintóticas del modelo usado. El modelo empleado para este estudio es proveniente de *La Ecuación No Lineal de Klein - Gordon* (NLKGE).

La interacción que se hallara en este modelo se dividirá en dos casos: para solitones escalares simétricos y antisimétricos. La diferencia en cada uno de los casos es la simetría de la solución solitón con respecto a la transformación $z \rightarrow -z$, previo al cálculo de la interacción se mencionara en forma resumida *La Ecuación No Lineal de Klein - Gordon*.

4.1. LA ECUACIÓN NO LINEAL DE KLEIN-GORDON (NLKGE)

Los físicos teóricos para poder comprender muchos fenómenos no lineales que surgen en la naturaleza como por ejemplo la dinámica de fluidos, modelan el comportamiento del sistema a través de ecuaciones diferenciales parciales que en la mayoría de modelos no lineales son difíciles de resolver estas ecuaciones. Un ejemplo de estos modelos es el *Modelo de Klein - Gordon No Lineal* el cual surge en la Mecánica Cuántica Relativista y en la Teoría de Campos Cuánticos (QFT), este modelo es usado ampliamente para estudiar la dinámica de partículas elementales en la materia condensada [26]. Dicha ecuación de forma general esta dada por la siguiente expresión

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \alpha \nabla \phi + \beta \phi + \mu \phi^k = f(\mathbf{x}, t) \quad (4.1)$$

donde $f(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$; y α, β y μ son constantes.

4.2. INTERACCIÓN DE DOS SOLITONES ESCALARES SIMÉTRICOS

El modelo usado para este estudio sera una versión de *La Ecuación No Lineal de Klein - Gordon* con un termino no lineal cúbico ($k = 3$), dicho modelo esta dado por la siguiente

ecuación

$$(\square - 1 + \varphi^2)\varphi = 0. \quad (4.2)$$

Donde \square es el operador D' Alembertiano.

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

La *Densidad Lagrangiana* el cual dá origen a la ecuación de campo (4.2) por medio de la *Ecuación de Euler - Lagrange* ecuación (2.31) es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\nu\varphi\partial^\nu\varphi - V(\varphi)$$

con

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\varphi^2 - \frac{1}{2}\varphi^4\right).$$

Por lo tanto, hallando las componente T^{ki} del *Tensor Energía - Momento* (2.57) el cual nos permitirá encontrar la fuerza de entre dos solitones escalares.

$$T_{ki} = \partial_i\varphi\partial_k\varphi - \frac{1}{2}g_{ik}\left((\varphi_{,0})^2 - (\nabla\varphi)^2 - \varphi^2 + \frac{1}{2}\varphi^4\right) \quad (4.3)$$

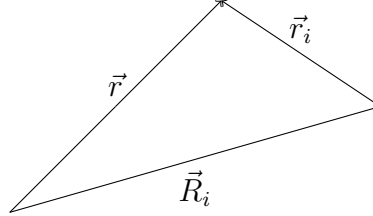
Analizamos dos solitones, que se describen como la solución de una partícula $u_1(\vec{r})$ y $u_2(\vec{r})$ bajo la condición que están lo suficientemente lejos.

Entonces una solución cuasiestática de dos partículas φ es aproximadamente la suma:

$$\varphi = u_1(\vec{r}) + u_2(\vec{r}), \quad (4.4)$$

donde

$$\vec{r}_i = \vec{r} - \vec{R}_i \quad (4.5)$$



Si las partículas son iguales entonces $u_1 = u_2 = u$ y el campo φ es simétrico con respecto a la transformación $z \rightarrow -z$, y además el centro de los solitones se encuentran en el eje Z como se muestra en la figura 4.1.

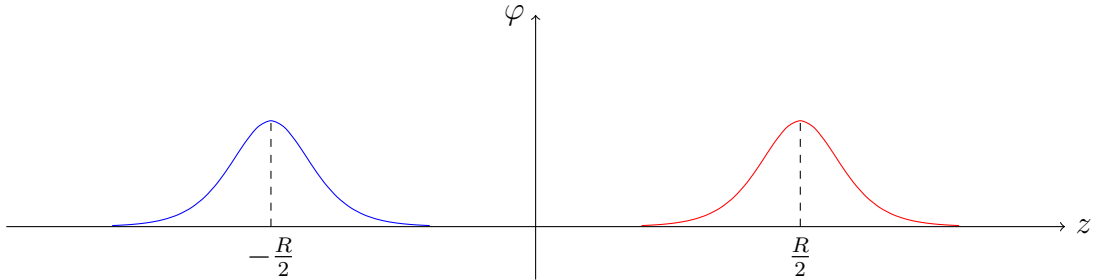


Figura 4.1: Dos solitones cuyos centros están ubicados en el eje Z , separados una distancia $R \gg 1$ (R mucho mayor al tamaño de cada solitón). Los cuales son simétricos con respecto a la transformación $z \rightarrow -z$.

Por otro lado $\varphi_{,3}\Big|_{z=0} = 0$, entonces

$$T^{33}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2} \left((\varphi_{,0})^2 - (\varphi_{,1})^2 - (\varphi_{,2})^2 - \varphi^2 + \frac{1}{2}\varphi^4 \right), \quad (4.6)$$

colocando el campo:

$$u_i = g \frac{e^{-r_i}}{r_i} \quad r_i = |\vec{r}_i| \quad g = cte. \quad (4.7)$$

Donde u_i corresponde a la solución asintótica de la ecuación del campo para $r \gg 1$, pero como $\varphi = u_1(\vec{r}) + u_2(\vec{r})$, entonces se tiene

$$\varphi = 2g \frac{e^{-r}}{r}, \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}. \quad (4.8)$$

Entonces, hallando los términos de la componente T^{33} , se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{2g}{r^2} \left[\frac{-x}{r} e^{-r} r + \frac{x e^{-r}}{r} \right] \\ &= \frac{2g}{r^2} \left(-x e^{-r} + \frac{x e^{-r}}{r} \right) \\ &= \frac{2g}{r^2} x e^{-r} \left(-1 + \frac{1}{r} \right), \end{aligned}$$

pero como estamos considerando distancia bastante alejadas entonces $r \gg 1$, por lo tanto $1/r \approx 0$.

Y se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{x}{r} \frac{2g}{r} e^{-r} \\ &= -\frac{x}{r} \varphi. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ahora hallando el termino $\varphi_{,2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{2g}{r^2} \left[\frac{-y}{r} e^{-r} r + \frac{y e^{-r}}{r} \right] \\ &= \frac{2g}{r^2} \left(-y e^{-r} + \frac{y e^{-r}}{r} \right) \\ &= \frac{2g}{r^2} y e^{-r} \left(-1 + \frac{1}{r} \right) \quad \text{pero } r \gg 1 \\ &= -\frac{y}{r} \frac{2g}{r} e^{-r} \\ &= -\frac{y}{r} \varphi, \end{aligned} \quad (4.10)$$

y como φ no depende del tiempo (debido a que se considera cuasiestático), entonces:

$$\varphi_{,0} = 0, \quad (4.11)$$

por lo tanto:

$$T^{33} = \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{r^2} \varphi^2 - \frac{y^2}{r^2} \varphi^2 - \varphi^2 + \frac{1}{2} \varphi^4 \right). \quad (4.12)$$

Entonces, sea la integral el cual nos permitirá encontrar la fuerza

$$F^i = - \oint_S T^{ki} dS_k, \quad (4.13)$$

y como solo se integrara en el plano $Z = 0$ y como $\varphi_{,3} \Big|_{z=0} = 0$, en consecuencia:

$$T^{12} = T^{21} = T^{13} = T^{31} = T^{23} = T^{32} = 0$$

entonces, solo se tendrá :

$$F^3 = - \int_S T^{33} dS \quad \text{donde} \quad dS = \rho d\theta d\rho, \quad \rho^2 = x^2 + y^2, \quad (4.14)$$

reemplazando el valor de T^{33} en la integral F^3 , se tiene:

$$\begin{aligned} F^3 &= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{1}{2} \left(-\frac{\rho^2}{r^2} \varphi^2 - \varphi^2 + \frac{1}{2} \varphi^4 \right) \rho d\rho \\ &= -\pi \int_0^\infty \left(-\frac{\rho^2}{r^2} \varphi^2 - \varphi^2 + \frac{1}{2} \varphi^4 \right) \rho d\rho, \end{aligned}$$

debido a que $\varphi^4 \sim \frac{1}{r^4}$ y como r es muy grande entonces vamos a considerar que $\varphi^4 \approx 0$.

Ademas como : $r^2 = \rho^2 + \frac{R^2}{4} \rightarrow \rho^2 = r^2 - \frac{R^2}{4}$ y $r dr = \rho d\rho$,

entonces :

$$F^3 = \pi \int_{R/2}^\infty \varphi^2 \left(\frac{r^2 - R^2/4}{r^2} + 1 \right) r dr,$$

reemplazando φ , tenemos :

$$\begin{aligned} F^3 &= \pi \int_{R/2}^\infty 4g^2 \frac{e^{-2r}}{r^2} \left(\frac{r^2 - R^2/4}{r^2} + 1 \right) r dr \\ &= 4\pi g^2 \int_{R/2}^\infty \frac{e^{-2r}}{r^3} \left(2r^2 - \frac{R^2}{4} \right) dr \\ &= 4\pi g^2 \int_{R/2}^\infty e^{-2r} \left(2 - \frac{R^2}{4r^2} \right) \frac{dr}{r} \end{aligned}$$

sea : $x = 2r \rightarrow dx = 2dr$

$$\begin{aligned} F^3 &= 4\pi g^2 \int_{R/2}^\infty e^{-x} \left(2 - \frac{R^2}{x^2} \right) \frac{\frac{dr}{2}}{\frac{x}{2}} \\ &= 4\pi g^2 \int_R^\infty e^{-x} \left(2 - \frac{R^2}{x^2} \right) \frac{dx}{x}, \end{aligned}$$

integrando por partes:

$$\begin{aligned}
\int_R^\infty e^{-x} \frac{dx}{x} &= \frac{e^{-R}}{R} - \int_R^\infty \frac{e^{-x}}{x^2} dx \\
&= \frac{e^{-R}}{R} - \frac{e^{-R}}{R^2} + 2 \int_R^\infty e^{-x} \frac{dx}{x^3} \\
&= \frac{e^{-R}}{R} \left(1 - \frac{1}{R} + 2 \int_R^\infty e^{-x} \frac{dx}{x^3} \right),
\end{aligned} \tag{4.15}$$

integrando por partes:

$$\begin{aligned}
\int_R^\infty e^{-x} \frac{dx}{x^3} &= \frac{e^{-R}}{R^3} - 3 \int_R^\infty \frac{e^{-x}}{x^4} dx \\
&= \frac{e^{-R}}{R^3} - 3 \left(\frac{e^{-R}}{R^4} - 4 \int_R^\infty e^{-x} \frac{dx}{x^5} \right) \\
&= \frac{e^{-R}}{R^3} - 3 \frac{e^{-R}}{R^4} + 12 \int_R^\infty e^{-x} \frac{dx}{x^5} \\
&= \frac{e^{-R}}{R^3} \left(1 - \frac{3}{R} \right) + O\left(\frac{e^{-R}}{R^5}\right),
\end{aligned} \tag{4.16}$$

donde O es una función que depende de (e^{-R}/R^5) .

Como:

$$F^3 = 4\pi g^2 \left(2 \int_R^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx - R^2 \int_R^\infty \frac{e^{-x}}{x^3} dx \right),$$

entonces, usando (4.15) y (4.16) para hallar F^3 tenemos:

$$\begin{aligned}
F^3 &= 4\pi g^2 \left[2 \left\{ \frac{e^{-R}}{R} \left(1 - \frac{1}{R} \right) + 2 \int_R^\infty \frac{e^{-x}}{x^3} dx \right\} - R^2 \int_R^\infty \frac{e^{-x}}{x^3} dx \right] \\
&= 4\pi g^2 \left[2 \frac{e^{-R}}{R} \left(1 - \frac{1}{R} \right) + (4 - R^2) \int_R^\infty \frac{e^{-x}}{x^3} dx \right] \\
&= 4\pi g^2 \left[2 \frac{e^{-R}}{R} \left(1 - \frac{1}{R} \right) + (4 - R^2) \left(\frac{e^{-R}}{R^3} \left(1 - \frac{3}{R} \right) + O\left(\frac{e^{-R}}{R^5}\right) \right) \right] \\
&= 4\pi g^2 \left[2 \frac{e^{-R}}{R} \left(1 - \frac{1}{R} \right) + \frac{4e^{-R}}{R^3} \left(1 - \frac{3}{R} \right) - \frac{e^{-R}}{R} \left(1 - \frac{3}{R} \right) + (4 - R^2) O\left(\frac{e^{-R}}{R^5}\right) \right] \\
&= 4\pi g^2 \left[2 \frac{e^{-R}}{R} \left(1 - \frac{1}{R} \right) - \frac{e^{-R}}{R} \left(1 - \frac{3}{R} \right) + O\left(\frac{e^{-R}}{R^3}\right) \right],
\end{aligned}$$

despreciando las potencias mayores que 1 de $(1/R)$, debido a que R es muy grande, tenemos:

$$\begin{aligned}
F^3 &= 4\pi g^2 \frac{e^{-R}}{R} \left[2 \left(1 - \frac{1}{R} \right) - \left(1 - \frac{3}{R} \right) \right] \\
&= 4\pi g^2 \frac{e^{-R}}{R} \left[1 + \frac{1}{R} \right],
\end{aligned} \tag{4.17}$$

pero: $\frac{e^{-R}}{R} \left[1 + \frac{1}{R} \right] = -\frac{d}{dR} \left(\frac{e^{-R}}{R} \right)$, entonces

$$F^3 = 4\pi g^2 \frac{d}{dR} \left(\frac{e^{-R}}{R} \right).$$

Pero como la fuerza es (ver ecuación (2.69)):

$$\mathcal{F} = -(1 - v^2)^{-1/2} \oint_S T^{ki} dS_k,$$

sin embargo como se considero que φ es cuasiestático ($\varphi_0 = 0$), es decir, su velocidad v es muy pequeña ($v \ll 1$), por lo cual se tiene que

$$\mathcal{F}^3 = - \oint_S T^{ki} dS_k,$$

entonces:

$$\mathcal{F}^3 = F^3$$

por consiguiente la fuerza es :

$$\mathcal{F}^3 = 4\pi g^2 \frac{d}{dR} \left(\frac{e^{-R}}{R} \right). \quad (4.18)$$

Donde la fuerza \mathcal{F}^3 es la fuerza de atracción entre solitones en la dirección z .

Recordando que: $\vec{F} = -\nabla U$, en consecuencia

$$U = -4\pi g^2 \frac{e^{-R}}{R}. \quad (4.19)$$

Donde (4.19) no es mas que *La Ley de Yukawa*

4.3. INTERACCIÓN DE DOS SOLITONES ESCALARES ASIMÉTRICOS

Siguiendo utilizando el modelo :

$$(\square - 1 + \varphi^2)\varphi = 0 \quad (4.20)$$

Analizando dos solitones que se describen como la solución de una partícula $u_1(\vec{r})$ y $u_2(\vec{r})$ bajo la condición que están lo suficientemente lejos.

La solución cuasiestática de dos partículas φ es aproximadamente la suma:

$$\varphi = u_1(\vec{r}) + u_2(\vec{r}). \quad (4.21)$$

Si consideramos que las partículas sean diferentes de modo que $u_1 = -u_2 = u$, por lo tanto el campo φ sera antisimétrico con respecto a la transformación $z \rightarrow -z$, y el centro de los solitones se encuentra en el eje Z , como se muestra en la figura 4.2:

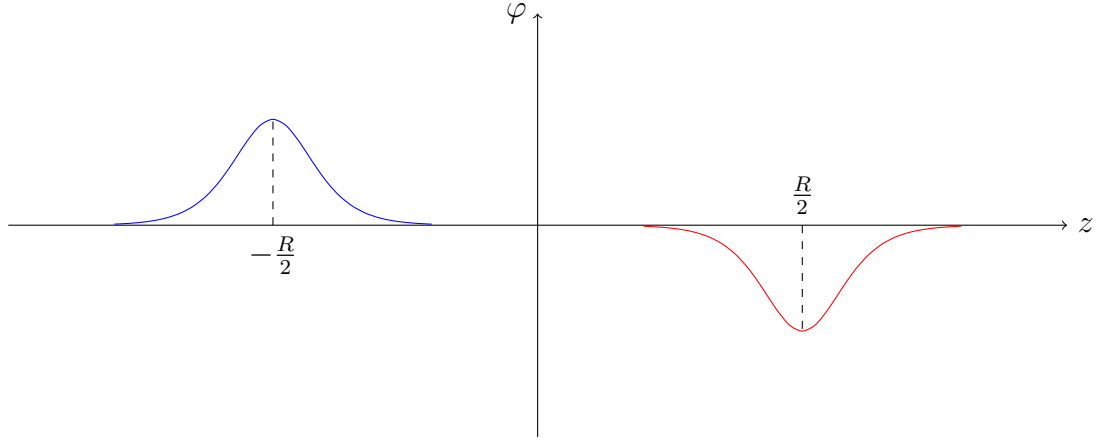


Figura 4.2: Dos solitones cuyos centros están ubicados en el eje \mathbf{Z} , separados una distancia $R \gg 1$ (R mucho mayor al tamaño de cada solitón). Los cuales son asimétricos con respecto a la transformación $z \rightarrow -z$.

por lo tanto, como las partículas son diferentes, entonces se tendrá:

$$\begin{aligned}\varphi &= u_1 + u_2 \\ &= u - u \\ &= 0,\end{aligned}$$

en consecuencia para $z = 0$, se tendrá:

$$\begin{aligned}\varphi_{,0} &= 0 \\ \varphi_{,1} &= 0 \\ \varphi_{,2} &= 0,\end{aligned}$$

y como el *Tensor de Energía - Momento* para este modelo se expresa de la siguiente forma:

$$T_{ki} = \partial_i \varphi \partial_k \varphi - \frac{1}{2} g_{ik} \left((\varphi_{,0})^2 - (\nabla \varphi)^2 - \varphi^2 + \frac{1}{2} \varphi^4 \right). \quad (4.22)$$

Por ende para el caso en que las partículas sean $u_1 = -u_2 = u$, se tendrá:

$$T^{33} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2} (\varphi_{,3})^2 > 0 \quad (4.23)$$

como la fuerza entre solitones es:

$$\mathcal{F}^i = -(1 - v^2)^{-1/2} \oint_S T^{ki} dS_k$$

sin embargo, como es cuasiestático por lo tanto, la velocidad v es muy pequeña ($v \ll 1$), en consecuencia:

$$\mathcal{F}^i = - \int_S T^{ki} dS_k,$$

entonces:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^3 &= \int_S T^{33} dS, \quad dS = dx dy \\ &= -\frac{1}{2} \int (\varphi_{,3})^2 dx dy < 0.\end{aligned}$$

Así pues dicha fuerza es de repulsión, por otro lado se tiene que:

$$\begin{aligned}(\varphi_{,3}) &= -2g \frac{z}{r} \left(1 + \frac{1}{r}\right) \frac{e^{-r}}{r} \Big|_{z=R/2} \\ &= -g \frac{R}{r^2} \left(1 + \frac{1}{r}\right) e^{-r}.\end{aligned}$$

Debido a lo cual la fuerza sera:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^3 &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{g^2 R^2}{r^4} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^2 e^{-2r} \rho d\rho \\ &= -\pi g^2 R^2 \int_0^\infty e^{-2r} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^2 \frac{\rho d\rho}{r^4},\end{aligned}$$

pero como $r \gg 1$, usaremos la siguiente aproximación $(1+x)^n \approx 1+nx$, si x es muy pequeño, entonces:

$$\mathcal{F}^3 = -\pi g^2 R^2 \int_0^\infty e^{-2r} \left(1 + \frac{2}{r}\right) \frac{\rho d\rho}{r^4},$$

ademas $r^2 = \rho^2 + \frac{R^2}{4}$, entonces $r dr = \rho d\rho$, por ello

$$\mathcal{F}^3 = -\pi g^2 R^2 \int_{R/2}^\infty e^{-2r} \left(1 + \frac{2}{r}\right) \frac{dr}{r^3},$$

sea $x = 2r$, entonces:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^3 &= -\pi g^2 R^2 \int_R^\infty e^{-x} \left(1 + \frac{4}{x}\right) \frac{\frac{dx}{2}}{\frac{x^3}{8}} \\ &= -4\pi g^2 R^2 \int_R^\infty e^{-x} \left(1 + \frac{4}{x}\right) \frac{dx}{x^3} \\ &= -4\pi g^2 R^2 \left(\int_R^\infty e^{-x} \frac{dx}{x^3} + 4 \int_R^\infty e^{-x} \frac{dx}{x^4} \right)\end{aligned}$$

donde:

$$\int_R^\infty e^{-x} \frac{dx}{x^3} = \frac{e^{-R}}{R^3} \left(1 - \frac{3}{R}\right) + O\left(\frac{e^{-R}}{R^5}\right),$$

y ademas

$$\begin{aligned}\int_R^\infty e^{-x} \frac{dx}{x^4} &= \frac{e^{-R}}{R^4} - 4 \int_R^\infty e^{-x} \frac{dx}{x^5} \\ &= \frac{e^{-R}}{R^4} + O\left(\frac{e^{-R}}{R^5}\right).\end{aligned}$$

Entonces la fuerza sera la siguiente:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^3 &= -4\pi g^2 R^2 \left[\frac{e^{-R}}{R^3} \left(1 - \frac{3}{R}\right) + 4 \frac{e^{-R}}{R^4} + O\left(\frac{e^{-R}}{R^5}\right) \right] \\ &= -4\pi g^2 R^2 \left[\frac{e^{-R}}{R^3} \left(1 + \frac{1}{R}\right) + O\left(\frac{e^{-R}}{R^5}\right) \right] \\ &= -4\pi g^2 R^2 \frac{e^{-R}}{R^3} \left[1 + \frac{1}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \right],\end{aligned}$$

pero como R es muy grande, entonces se tendrá que la fuerza de repulsión entre solitones es:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^3 &= -4\pi g^2 \frac{e^{-R}}{R} \left(1 + \frac{1}{R}\right) \\ &= 4\pi g^2 \frac{d}{dR} \left(\frac{e^{-R}}{R}\right),\end{aligned}\tag{4.24}$$

pero como $\vec{F} = -\nabla U$, entonces

$$U = -4\pi g^2 \frac{e^{-R}}{R}.\tag{4.25}$$

Igual que en el caso anterior el potencial es igual al *Potencial de Yukawa*.

Capítulo 5

INTERACCIÓN DE SOLITONES ESPINORIALES

Uno de los modelos en la Teoría Cuántica de Campo (QFT) que admite soluciones de tipo solitón es *La Ecuación No Lineal de Dirac* (NLDE), dicha ecuación fue introducida inicialmente por Dmitri Ivanenko como una ecuación de Dirac no lineal con autointeracción de tipo escalar [15]. Y en 1970 Mario Soler reintroduce e investiga el modelo planteado por Ivanenko como un *toy model* de nucleones extendidos con autointeracción de tipo escalar [33]. En este capítulo se seguirá con el propósito del capítulo 4 que es hallar la interacción entre solitones en modelos no lineales, donde a diferencia del capítulo anterior estos solitones presentan espín que son soluciones del *Modelo de Soler en tres dimensiones*, previo al cálculo de esta interacción hagamos un pequeño resumen de la historia del *Modelo de Soler* y las características de dicho modelo.

5.1. EL MODELO DE SOLER

El primero en proponer un modelo no lineal de autointeracción de electrones fue el físico Ruso Dmitri Ivanenko en 1938, el agregó el término no lineal de autointeracción $(\bar{\Psi}\Psi)\Psi$ a la ecuación de Dirac [15]. En 1970 el físico Español Mario Soler vuelve a tener en cuenta este modelo para estudiar desde un punto de vista clásico la interacción de nucleones extendidos con sus propios campos electromagnéticos [33, 34]. La ecuación general del Modelo de Soler en forma covariante es [5]

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m + f(\bar{\Psi}\Psi))\Psi = 0. \quad (5.1)$$

Donde $f \in \mathbb{C}$ y $f(0) = 0$, la ecuación (5.1) admite soluciones de tipo solitón de la forma $\Psi(x, t) = \phi(x)e^{-iwt}$, en donde $\phi(x)$ es una función localizada en el espacio (es decir se vuelve pequeño cuando x es grande) y $w \in \mathbb{R}$ y además la ecuación (5.1) es invariante bajo el grupo $\mathbf{U}(1)$. Para el estudio de la interacción se usará el Modelo de Soler en tres dimensiones que tiene soluciones tipo solitón 4-espinor en la cual se usará el *Ansatz de Wakano* [39] para su desarrollo.

5.2. INTERACCIÓN DE SOLITONES EN EL MODELO DE SOLER

El modelo usado para este estudio es:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m + g(\bar{\Psi}\Psi))\Psi = 0, \quad (5.2)$$

donde $g > 0$ es la constante de acople.

Los solitones con espín $\frac{1}{2}$ de este modelo se describen con la solución.

$$\Psi = \frac{1}{2}e^{-i\omega t}(F + iG + (F - iG)\gamma^0)\Omega_{1/2}, \quad (5.3)$$

donde F, G son funciones radiales y $\Omega_{1/2}$ es el espinor esférico que es igual a [9]:

$$\Omega_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta e^{i\phi} \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

La Densidad Lagrangiana \mathcal{L} para este modelo esta dado por:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \partial_\mu \bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi) - m\bar{\Psi}\Psi + \frac{g}{2}(\bar{\Psi}\Psi)^2, \quad (5.5)$$

desarrollando la Densidad Lagrangiana tenemos:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(\bar{\Psi}\gamma^0 \partial_0 \Psi - \partial_0 \bar{\Psi}\gamma^0 \Psi) - \frac{i}{2}(\bar{\Psi}\gamma^k \partial_k \Psi - \partial_k \bar{\Psi}\gamma^k \Psi) - m\bar{\Psi}\Psi + \frac{g}{2}(\bar{\Psi}\Psi)^2$$

como: $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ y $(\gamma^0)^2 = 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{i}{2}(\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \partial_0 \Psi - \partial_0 \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \Psi) - \frac{i}{2}(\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^k \partial_k \Psi - \partial_k \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^k \Psi) - m\bar{\Psi}\Psi + \\ &\quad \frac{g}{2}(\bar{\Psi}\Psi)^2 \\ &= \frac{i}{2}(\Psi^\dagger \partial_0 \Psi - \partial_0 \Psi^\dagger \Psi) - \frac{i}{2}(\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^k \partial_k \Psi - \partial_k \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^k \Psi) - m\bar{\Psi}\Psi + \\ &\quad \frac{g}{2}(\bar{\Psi}\Psi)^2, \end{aligned}$$

pero $\gamma^k = \gamma^0 \alpha^k$, donde $\vec{\alpha}$ es igual a:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$, σ^i son las matrices de Pauli.

Ademas: $\partial_0 \Psi = -i\omega \Psi$ y $\partial_0 \Psi^\dagger = i\omega \Psi^\dagger$, entonces \mathcal{L} sera igual a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{i}{2}(-2i\omega \Psi^\dagger \Psi) - \frac{i}{2}(\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \alpha^k \partial_k \Psi - \partial_k \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \alpha^k \Psi) - m\bar{\Psi}\Psi + \\ &\quad \frac{g}{2}(\bar{\Psi}\Psi)^2 \\ &= \omega \Psi^\dagger \Psi - \frac{i}{2}(\Psi^\dagger \alpha^k \partial_k \Psi - \partial_k \Psi^\dagger \alpha^k \Psi) - m\bar{\Psi}\Psi + \frac{g}{2}(\bar{\Psi}\Psi)^2. \end{aligned}$$

Considerando que $\partial_k(\bar{\Psi}\Psi) = 0$, entonces:

$$\partial_k \Psi^\dagger \alpha^k \Psi = -\Psi^\dagger \alpha^k \partial_k \Psi,$$

por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= w\Psi^\dagger\Psi - \frac{i}{2}(\Psi^\dagger\alpha^k\partial_k\Psi + \Psi^\dagger\alpha^k\partial_k\Psi) - m\bar{\Psi}\Psi + \frac{g}{2}(\bar{\Psi}\Psi)^2 \\ &= w\Psi^\dagger\Psi + i(\Psi^\dagger(\vec{\alpha} \cdot \nabla)\Psi) - m\bar{\Psi}\Psi + \frac{g}{2}(\bar{\Psi}\Psi)^2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Empleando la ecuación (5.6) podemos hallar el Lagrangiano el cual se escribirá de la siguiente forma

$$L = \int \left[i\Psi^\dagger(\vec{\alpha} \cdot \nabla)\Psi + w\Psi^\dagger\Psi - m\bar{\Psi}\Psi + \frac{g}{2}(\bar{\Psi}\Psi)^2 \right] d^3x. \quad (5.7)$$

Ahora aplicaremos la transformación de escala a la función Ψ de la funcional L , los cuales nos dará una relación que se utilizara al momento de hallar la energía

Realizando la transformación de escala a la función Ψ :

$$\Psi \rightarrow \lambda\Psi, \quad (5.8)$$

en consecuencia, se tendrá que:

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \int \left[i(\lambda\Psi)^\dagger \vec{\alpha} \cdot \nabla(\lambda\Psi) + w(\lambda\Psi)^\dagger(\lambda\Psi) - m(\overline{\lambda\Psi})(\lambda\Psi) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2}((\overline{\lambda\Psi})(\lambda\Psi))^2 \right] d^3x \\ L(\lambda) &= \int \left[i\lambda^2\Psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \nabla\Psi + \lambda^2w\Psi^\dagger\Psi - m\lambda^2\bar{\Psi}\Psi + \lambda^4\frac{g}{2}(\bar{\Psi}\Psi)^2 \right] d^3x. \end{aligned}$$

Utilizando el *Teorema de Derrick*, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=1} &= 0 \\ \int \left[i\Psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \nabla\Psi + w\Psi^\dagger\Psi - m\bar{\Psi}\Psi + g(\bar{\Psi}\Psi)^2 \right] d^3x &= 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Recordando la expresión del *Tensor Energía - Momento*

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,\mu}} \partial^\nu \Psi - g^{\mu\nu} \mathcal{L},$$

reemplazando nuestra Densidad Lagrangiana (5.6) para este modelo obtenemos el Tensor Energía - Momento

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial^\nu\Psi - \partial^\nu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi) - g^{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (5.10)$$

Hallemos la densidad de energía \mathcal{H} .

Como $\mathcal{H} = T^{00}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{i}{2}(\bar{\Psi}\gamma^0\partial^0\Psi - \partial^0\bar{\Psi}\gamma^0\Psi) - \mathcal{L} \\
&= \frac{i}{2}(\bar{\Psi}\gamma^0\partial^0\Psi - \partial^0\bar{\Psi}\gamma^0\Psi) - \frac{i}{2}(\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - \partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi) + m\bar{\Psi}\Psi - \frac{g}{2}(\bar{\Psi}\Psi)^2 \\
&= \frac{i}{2}(\bar{\Psi}\gamma^0\partial^0\Psi - \partial^0\bar{\Psi}\gamma^0\Psi) - \frac{i}{2}(\bar{\Psi}\gamma^0\partial_0\Psi - \partial_0\bar{\Psi}\gamma^0\Psi) - \frac{i}{2}(\bar{\Psi}\gamma^k\partial_k\Psi - \partial_k\bar{\Psi}\gamma^k\Psi) + \\
&\quad m\bar{\Psi}\Psi - \frac{g}{2}(\bar{\Psi}\Psi)^2.
\end{aligned}$$

Como $\partial_0 = \partial^0$ y $\gamma^k = \gamma^0\alpha^k$, en consecuencia

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= -\frac{i}{2}(\Psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\alpha^k\partial_k\Psi - \partial_k\Psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\alpha^k\Psi) + m\bar{\Psi}\Psi - \frac{g}{2}(\bar{\Psi}\Psi)^2 \\
&= -\frac{i}{2}(\Psi^\dagger\alpha^k\partial_k\Psi - \partial_k\Psi^\dagger\alpha^k\Psi) + m\bar{\Psi}\Psi - \frac{g}{2}(\bar{\Psi}\Psi)^2,
\end{aligned}$$

teniendo que $\partial_k(\bar{\Psi}\Psi) = 0 \rightarrow \partial_k\Psi^\dagger\alpha^k\Psi = -\Psi^\dagger\alpha^k\partial_k\Psi$.

Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= -\frac{i}{2}(2\Psi^\dagger\alpha^k\partial_k\Psi) + m\bar{\Psi}\Psi - \frac{g}{2}(\bar{\Psi}\Psi)^2 \\
&= -i\Psi^\dagger(\alpha \cdot \nabla)\Psi + m\bar{\Psi}\Psi - \frac{g}{2}(\bar{\Psi}\Psi)^2,
\end{aligned}$$

entonces, la energía (E) estará expresada por:

$$\begin{aligned}
E &= \int \mathcal{H} d^3x \\
E &= \int \left[-i\Psi^\dagger(\alpha \cdot \nabla)\Psi + m\bar{\Psi}\Psi - \frac{g}{2}(\bar{\Psi}\Psi)^2 \right] d^3x. \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Utilizando la ecuación (5.9) vemos que:

$$-i\Psi^\dagger(\alpha \cdot \nabla)\Psi = w\Psi^\dagger\Psi - m\bar{\Psi}\Psi + g(\bar{\Psi}\Psi)^2,$$

por lo tanto reemplazando esta relación en la expresión de la energía (5.11) se tiene:

$$\begin{aligned}
E &= \int \left[w\Psi^\dagger\Psi - m\bar{\Psi}\Psi + g(\bar{\Psi}\Psi)^2 + m\bar{\Psi}\Psi - \frac{g}{2}(\bar{\Psi}\Psi)^2 \right] d^3x \\
&= \int \left[w\Psi^\dagger\Psi + \frac{g}{2}(\bar{\Psi}\Psi)^2 \right] d^3x, \tag{5.12}
\end{aligned}$$

de donde se ve que la energía es determinada positiva.

Supongamos ahora, que dos solitones forman un estado ligado de gran dimensión R (muy separadas entre ellas), que supera bastante la dimensión de un solitón m^{-1} , es decir se considera $mR \gg 1$.

Encontramos ahora la solución asintótica de una partícula a grandes distancias. Para ello se considera:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-iwt} \tag{5.13}$$

donde :

$$\varphi = \frac{1}{(4\pi)^{1/2}} F(r) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

$$\chi = \frac{i}{(4\pi)^{1/2}} G(r) \sigma_r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_r = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r}. \quad (5.15)$$

De la ecuación de campo tenemos que:

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m + g\bar{\Psi}\Psi)\Psi &= 0 \\ (i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^k \partial_k - m + g\bar{\Psi}\Psi)\Psi &= 0, \end{aligned} \quad (5.16)$$

pero:

$$\partial_0 \Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \partial_0 e^{-i\omega t} = -i\omega \Psi,$$

por consiguiente, en la ecuación de campo (5.16) se tiene que:

$$(w\gamma^0 + i\gamma^k \partial_k - m + g\bar{\Psi}\Psi)\Psi = 0,$$

como $\gamma^k = \gamma^0 \alpha^k$, entonces:

$$(w\gamma^0 + i\gamma^0 \alpha^k \partial_k - m + g\bar{\Psi}\Psi)\Psi = 0,$$

multiplicando por la izquierda por γ^0 , ($(\gamma^0)^2 = 1$):

$$[i(\vec{\alpha} \cdot \nabla) + w - m\gamma^0 + g\gamma^0(\bar{\Psi}\Psi)] \Psi = 0. \quad (5.17)$$

Hallemos : $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$, como

$$\Psi = \frac{e^{-i\omega t}}{(4\pi)^{1/2}} \begin{bmatrix} F(r) \\ 0 \\ iG(r)\sigma_r \\ 0 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} \Psi^\dagger &= \frac{e^{i\omega t}}{(4\pi)^{1/2}} [F(r) \ 0 \ -iG(r)\sigma_r^\dagger \ 0], \quad \sigma_r^\dagger = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{r})^\dagger}{r} = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{r})}{r} \\ &= \frac{e^{i\omega t}}{(4\pi)^{1/2}} [F(r) \ 0 \ -iG(r)\sigma_r \ 0], \end{aligned}$$

por ello

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} &= \frac{e^{i\omega t}}{(4\pi)^{1/2}} [F(r) \ 0 \ -iG(r)\sigma_r \ 0] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^{i\omega t}}{(4\pi)^{1/2}} \left[F(r) \ 0 \ iG(r) \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{r})}{r} \ 0 \right]. \end{aligned}$$

Halleemos el producto $\bar{\Psi}\Psi$:

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}\Psi &= \frac{e^{iwt}}{(4\pi)^{1/2}} \begin{bmatrix} F(r) & 0 & iG(r)\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{r})}{r} & 0 \end{bmatrix} \frac{e^{-iwt}}{(4\pi)^{1/2}} \begin{bmatrix} F(r) \\ 0 \\ iG(r)\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{r})}{r} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(F^2 - G^2 \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{r})^2}{r^2} \right),\end{aligned}$$

usando la siguiente propiedad de las matrices de Pauli [13]:

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + i\vec{\sigma}(\vec{a}\times\vec{b}), \quad (5.18)$$

Entonces $(\vec{\sigma}\cdot\vec{r})^2 = r^2$, por lo tanto:

$$\bar{\Psi}\Psi = \frac{1}{4\pi}(F^2 - G^2).$$

Reemplazando el valor de $\bar{\Psi}\Psi$ en la ecuación (5.17) se obtiene la siguiente ecuación de campo:

$$i(\vec{\alpha}\cdot\nabla)\Psi + w\Psi + \left(-m + \frac{g}{4\pi}(F^2 - G^2)\right)\gamma^0\Psi = 0,$$

desarrollando esta ecuación tenemos:

$$\begin{aligned}i(\vec{\alpha}\cdot\nabla) \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + \left(-m + \frac{g}{4\pi}(F^2 - G^2)\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} &= 0 \\ i(\alpha^k \partial_k) \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + \left(-m + \frac{g}{4\pi}(F^2 - G^2)\right) \begin{pmatrix} \varphi \\ -\chi \end{pmatrix} &= 0,\end{aligned}$$

como

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

entonces:

$$\begin{aligned}i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_k \varphi \\ \partial_k \chi \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + \left(-m + \frac{g}{4\pi}(F^2 - G^2)\right) \begin{pmatrix} \varphi \\ -\chi \end{pmatrix} &= 0 \\ i \begin{pmatrix} \sigma^k \partial_k \chi \\ \sigma^k \partial_k \varphi \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + \left(-m + \frac{g}{4\pi}(F^2 - G^2)\right) \begin{pmatrix} \varphi \\ -\chi \end{pmatrix} &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$i(\vec{\sigma}\cdot\nabla)\chi + \left(w - m + \frac{g}{4\pi}(F^2 - G^2)\right)\varphi = 0 \quad (5.20)$$

$$i(\vec{\sigma}\cdot\nabla)\varphi + \left(w + m - \frac{g}{4\pi}(F^2 - G^2)\right)\chi = 0, \quad (5.21)$$

para poder desarrollar estas ecuaciones usaremos el operador Laplaciano ∇ en coordenadas esféricas.

$$\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi},$$

y la forma explícita de las matrices $\sigma_r = \vec{\sigma} \cdot \hat{e}_r$, $\sigma_\theta = \vec{\sigma} \cdot \hat{e}_\theta$, $\sigma_\phi = \vec{\sigma} \cdot \hat{e}_\phi$:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \\ \sigma_\theta &= \begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta e^{-i\phi} \\ \cos \theta e^{i\phi} & \sin \theta \end{pmatrix} \\ \sigma_\phi &= \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\phi} \\ ie^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

entonces:

$$\vec{\sigma} \cdot \nabla = \sigma_r \frac{\partial}{\partial r} + \sigma_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \sigma_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

Hallemos $\vec{\sigma} \cdot \nabla \chi$:

$$\begin{aligned}\vec{\sigma} \cdot \nabla \chi &= \frac{i}{(4\pi)^{1/2}} \vec{\sigma} \cdot \nabla (G(r) \sigma_r) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^{1/2}} \vec{\sigma} \cdot [\nabla (G(r)) \sigma_r + G(r) \nabla (\sigma_r)] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^{1/2}} [\vec{\sigma} \cdot \nabla (G(r)) \sigma_r + G(r) \vec{\sigma} \cdot \nabla (\sigma_r)] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

como G es una función radial solo tendrá derivada con respecto a r , por ello se tendrá que:

$$\vec{\sigma} \cdot \nabla \chi = \frac{i}{(4\pi)^{1/2}} \left[G'(r) \sigma_r^2 + G(r) \left(\sigma_r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} + \sigma_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \phi} \right) \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

teniendo en cuenta que:

$$\sigma_r^2 = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{r})}{r} \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{r})}{r} = 1,$$

entonces, reemplazando las matrices σ_r , σ_θ y σ_ϕ , se obtiene que:

$$\begin{aligned}\vec{\sigma} \cdot \nabla \chi &= \frac{i}{(4\pi)^{1/2}} \left\{ G'(r) + G(r) \left[0 + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta e^{-i\phi} \\ \cos \theta e^{i\phi} & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta e^{-i\phi} \\ \cos \theta e^{i\phi} & \sin \theta \end{pmatrix} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\phi} \\ ie^{i\phi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \sin \theta e^{-i\phi} \\ i \sin \theta e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix} \right] \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^{1/2}} \left\{ G'(r) + G(r) \left[\frac{1}{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta \end{pmatrix} \right] \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^{1/2}} \left[G'(r) + \frac{2G(r)}{r} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.22}\end{aligned}$$

Reemplazando la ecuación (5.22) en la ecuación (5.20), tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{-1}{(4\pi)^{1/2}} \left[G'(r) + \frac{2G(r)}{r} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{(4\pi)^{1/2}} \left[w - m + \frac{g}{4\pi} (F^2 - G^2) \right] F(r) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\ - \left(G'(r) + \frac{2G(r)}{r} \right) + \left[w - m + \frac{g}{4\pi} (F^2 - G^2) \right] F &= 0.\end{aligned}$$

Desarrollando la ecuación (5.21) obtenemos:

$$\begin{aligned}
i(\vec{\sigma} \cdot \nabla)\varphi + \left(w + m - \frac{g}{4\pi}(F^2 - G^2)\right) \chi &= 0 \\
i\vec{\sigma} \cdot \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{(4\pi)^{1/2}} F(r) \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[w + m - \frac{g}{4\pi}(F^2 - G^2)\right] \frac{i}{(4\pi)^{1/2}} G(r) \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{r})}{r} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\
i \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{r})}{r} \left\{ F' + \left[w + m - \frac{g}{4\pi}(F^2 - G^2)\right] G \right\} &= 0,
\end{aligned}$$

entonces:

$$F' + \left[w + m - \frac{g}{4\pi}(F^2 - G^2)\right] G = 0,$$

por ello, al desarrollar las ecuaciones (5.20) y (5.21), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas.

$$-\left(G'(r) + \frac{2G(r)}{r}\right) + \left[w - m + \frac{g}{4\pi}(F^2 - G^2)\right] F = 0 \quad (5.23)$$

$$F' + \left[w + m - \frac{g}{4\pi}(F^2 - G^2)\right] G = 0, \quad (5.24)$$

pero cuando $mr \gg 1$ se vuelven lineales es decir $F^2 \approx 0$ y $G^2 \approx 0$, entonces:

$$-G' - \frac{2}{r}G + (w - m)F = 0 \quad (5.25)$$

$$F' + (w + m)G = 0, \quad (5.26)$$

cuyas soluciones de esta sistema de ecuaciones diferenciales son:

$$G = \frac{-F}{m + w} \quad y \quad (5.27)$$

$$F = A \frac{e^{-\lambda r}}{r}, \quad (5.28)$$

donde : $A = \text{cte}$, $\lambda = (m^2 - w^2)^{1/2}$ y $\lambda r \gg 1$.

Considerando que dos partículas de espín 1/2 forman un estado ligado de gran radio ($R \gg 1$), en la aproximación cuasiestacionaria se coloca como:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2, \quad (5.29)$$

teniendo en cuenta que los espines \vec{s}_1 y \vec{s}_2 de los solitones se consideran con cualquier orientación, entonces su orientación se determinara con los ángulos θ_1 , θ_2 y ϕ , las cuales se muestran en la siguiente imagen.

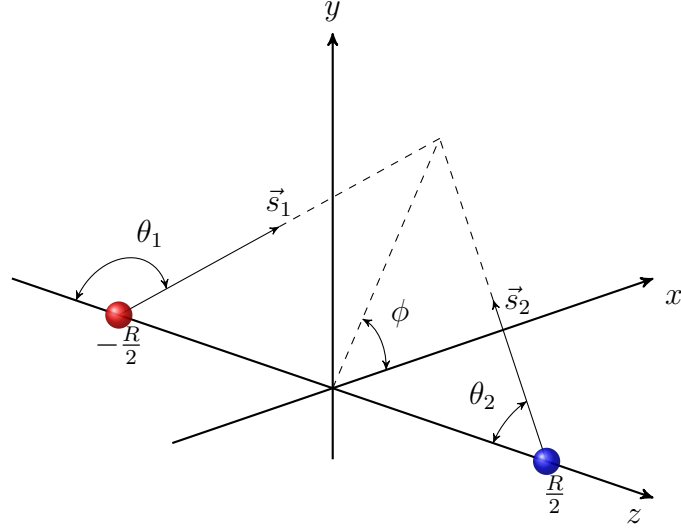


Figura 5.1: Configuración de dos solitones que forman un estado ligado de gran dimensión de radio R , en el cual los espines de cada solitón están orientadas en cualquier dirección y determinadas por los ángulos θ_1 , θ_2 y ϕ .

Si consideramos la ley de transformación de los espinores bajo la rotación de los ejes en un ángulo φ alrededor de la dirección \vec{n} .

$$\Psi(\vec{r}) = e^{-\frac{i}{2}(\vec{n} \cdot \vec{\Sigma})\varphi} \Psi'(\vec{r}'), \quad (5.30)$$

donde: $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ y $\vec{\Sigma} = \vec{\sigma} \otimes \sigma_0$; por lo tanto $\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$.

Pero las direcciones de los solitones están direccionados por los ángulos θ_1 , θ_2 y ϕ ; entonces el campo para estas dos partículas tiene la forma:

$$\Psi = e^{-\frac{i}{2}\Sigma^1\theta_1}\Psi_1 + e^{-\frac{i}{2}\Sigma^3\phi}e^{-\frac{i}{2}\Sigma^1\theta_2}\Psi_2. \quad (5.31)$$

Ahora hallaremos la fuerza que actúa sobre la partícula 1 debido a la partícula 2 en la dirección del eje z , entonces de acuerdo a la ecuación (2.69) la fuerza esta expresada de la siguiente forma:

$$\mathcal{F}^i = - \oint_{S_1} dS_k T^{ki} = - \int_{z=0} dx dy T^{3i}, \quad (5.32)$$

donde S_1 es la superficie que rodea a la primera partícula. Como R (distancia entre los solitones) es grande, entonces $\Psi_{1,2}$ cumplen con la ecuación lineal de Dirac, por lo tanto, debemos hallar el termino T^{3i} .

De acuerdo a la ecuación (5.10), tenemos que:

$$\begin{aligned} T^{3i} &= \frac{i}{2}(\bar{\Psi}\gamma^3\partial^i\Psi - \partial^i\bar{\Psi}\gamma^3\Psi) - g^{3i}\mathcal{L} \\ &= \frac{i}{2}(\Psi^\dagger\gamma^0\gamma^3\partial^i\Psi - \partial^i\Psi^\dagger\gamma^0\gamma^3\Psi) \\ &= \frac{i}{2}(\Psi^\dagger\alpha^3\partial^i\Psi - \partial^i\Psi^\dagger\alpha^3\Psi) \\ &= -\frac{i}{2}\Psi^\dagger\alpha^3\overleftrightarrow{\partial^i}\Psi, \end{aligned} \quad (5.33)$$

donde introduzcamos la siguiente notación: $\Psi^\dagger \alpha^3 \overleftrightarrow{\partial^i} \Psi = \partial^i \Psi^\dagger \alpha^3 \Psi - \Psi^\dagger \alpha^3 \partial^i \Psi$.

Reemplazando la ecuación (5.31) en la ecuación (5.33) obtenemos los siguiente:

$$T^{3i} = -\frac{i}{2} \left(\Psi_1^\dagger e^{\frac{i}{2}\Sigma^1\theta_1} \alpha^3 e^{-\frac{i}{2}\Sigma^1\theta_1} \overleftrightarrow{\partial^i} \Psi_1 + \Psi_2^\dagger e^{\frac{i}{2}\Sigma^3\phi} e^{\frac{i}{2}\Sigma^1\theta_2} \alpha^3 e^{-\frac{i}{2}\Sigma^3\phi} e^{-\frac{i}{2}\Sigma^1\theta_2} \overleftrightarrow{\partial^i} \Psi_2 + \Psi_1^\dagger \widehat{k} \overleftrightarrow{\partial^i} \Psi_2 + \Psi_2^\dagger \widehat{q} \overleftrightarrow{\partial^i} \Psi_1 \right)$$

donde hemos escrito que

$$\widehat{k} = e^{\frac{i}{2}\Sigma^1\theta_1} \alpha^3 e^{-\frac{i}{2}\Sigma^3\phi} e^{-\frac{i}{2}\Sigma^1\theta_2} \quad (5.34)$$

$$\widehat{q} = e^{\frac{i}{2}\Sigma^3\phi} e^{\frac{i}{2}\Sigma^1\theta_2} \alpha^3 e^{-\frac{i}{2}\Sigma^1\theta_1}. \quad (5.35)$$

Como solo nos interesa hallar la fuerza sobre la partícula 1 debido a la partícula 2, entonces solo se considerará el siguiente término:

$$T_{(1,2)}^{3i} = -\frac{i}{2} (\Psi_1^\dagger \widehat{k} \overleftrightarrow{\partial^i} \Psi_2), \quad (5.36)$$

en general $\Psi_1^\dagger \widehat{k} \overleftrightarrow{\partial^i} \Psi_2 = a + bi$. Entonces solo consideraremos la parte real de T^{3i} , por lo tanto obtenemos que:

$$T_{(1,2)}^{3i} = -\mathbf{Im} \left(\Psi_1^\dagger \widehat{k} \overleftrightarrow{\partial^i} \Psi_2 \right).$$

Para poder hallar la componente $T_{(1,2)}^{3i}$ expresaremos el término \widehat{k} en términos de las matrices de Pauli (σ_μ) y un cuadrivector a , cuya expresión es la siguiente:

$$\widehat{k} = e^{\frac{i}{2}\Sigma^1\theta_1} \alpha^3 e^{-\frac{i}{2}\Sigma^3\phi} e^{-\frac{i}{2}\Sigma^1\theta_2} = \sigma_\mu a^\mu \otimes \sigma^1, \quad (5.37)$$

donde:

$$a^\mu = \left(i \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \cos \theta_-, \sin \frac{\phi}{2} \sin \theta_-, \cos \frac{\phi}{2} \sin \theta_+, \cos \frac{\phi}{2} \cos \theta_+ \right), \theta_\pm = \frac{\theta_1 \pm \theta_2}{2} \quad (5.38)$$

Considerando la solución asintótica de una partícula a grandes distancias (ecuación (5.13)), entonces las funciones de campo para esta dos partículas (obviando los coeficientes que las multiplican) están dados por las siguientes funciones:

$$\Psi_s = \begin{pmatrix} \varphi_s \\ \chi_s \end{pmatrix} \quad s = 1, 2; \quad (5.39)$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi_s &= F_s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \chi_s &= iG_s(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}_s) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_s = \frac{\vec{r}_s}{r_s}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta estas funciones de campos halleemos el termino $T_{(1,2)}^{3i}$, desarrollando obtenemos:

$$\begin{aligned}
\Psi_1^\dagger \widehat{k} \overleftrightarrow{\partial}^i \Psi_2 &= [\varphi_1^\dagger \ \chi_1^\dagger] \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu a^\mu \\ \sigma_\mu a^\mu & 0 \end{pmatrix} \overleftrightarrow{\partial}^i \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \\
&= [\varphi_1^\dagger \ \chi_1^\dagger] \begin{pmatrix} \sigma_\mu a^\mu \overleftrightarrow{\partial}^i \chi_2 \\ \sigma_\mu a^\mu \overleftrightarrow{\partial}^i \varphi_2 \end{pmatrix} \\
&= \varphi_1^\dagger \sigma_\mu a^\mu \overleftrightarrow{\partial}^i \chi_2 + \chi_1^\dagger \sigma_\mu a^\mu \overleftrightarrow{\partial}^i \varphi_2 \\
&= i [F_1 \ 0] (\sigma_0 a^0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{a}) \begin{pmatrix} \overleftrightarrow{\partial}^i (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}_2) G_2 \\ 0 \end{pmatrix} - i [G_1 (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}_2) \ 0] \cdot \\
&\quad (\sigma_0 a^0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{a}) \begin{pmatrix} \overleftrightarrow{\partial}^i F_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Psi_1^\dagger \widehat{k} &= i F_1 (\sigma_0 a^0) \overleftrightarrow{\partial}^i (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}_2) G_2 - i F_1 \overleftrightarrow{\partial}^i (\vec{\sigma} \cdot \vec{a}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}_2) G_2 - \\
&\quad i G_1 (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}_1) (\sigma_0 a^0) \overleftrightarrow{\partial}^i F_2 + i G_1 (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}_1) (\vec{\sigma} \cdot \vec{a}) \overleftrightarrow{\partial}^i F_2.
\end{aligned}$$

Usando la siguiente propiedad $(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\vec{\sigma}(\vec{a} \times \vec{b})$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\Psi_1^\dagger \widehat{k} \overleftrightarrow{\partial}^i \Psi_2 &= i F_1 (\sigma_0 a^0) \overleftrightarrow{\partial}^i (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}_2) G_2 - i F_1 \overleftrightarrow{\partial}^i (\vec{n}_2 \cdot \vec{a} + i\vec{\sigma}(\vec{a} \times \vec{n}_2)) G_2 - \\
&\quad i G_1 (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}_1) (\sigma_0 a^0) \overleftrightarrow{\partial}^i F_2 + i G_1 (\vec{n}_1 \cdot \vec{a} + i\vec{\sigma}(\vec{n}_1 \times \vec{a})) \overleftrightarrow{\partial}^i F_2,
\end{aligned}$$

pero, para hallar el termino $T_{(1,2)}^{3i}$ solo consideramos la parte imaginaria de $\Psi_1^\dagger \widehat{k} \overleftrightarrow{\partial}^i \Psi_2$, entonces:

$$\mathbf{Im}(\Psi_1^\dagger \widehat{k} \overleftrightarrow{\partial}^i \Psi_2) = -F_1 \overleftrightarrow{\partial}^i (\vec{n}_2 \cdot \vec{a}) G_2 + G_1 (\vec{n}_1 \cdot \vec{a}) \overleftrightarrow{\partial}^i F_2,$$

por lo tanto:

$$T_{(1,2)}^{3i} = F_1 \overleftrightarrow{\partial}^i (\vec{n}_2 \cdot \vec{a}) G_2 - G_1 (\vec{n}_1 \cdot \vec{a}) \overleftrightarrow{\partial}^i F_2$$

en el plano de integración $z = 0$ se tiene:

$$F_1 = F_2 = F \quad n_1^z = -n_2^z \quad n_1^i = n_2^i = n^i \quad , \quad i = 1, 2$$

por ello:

$$\vec{F}_\perp = -\frac{2}{m+w} \int dxdy \left(F' (\vec{a} \cdot \vec{n}) \vec{n}^\perp \right) \tag{5.40}$$

$$F_z = \frac{2a_z}{m+w} \int dxdy \left[(n_1^z)^2 \left((F')^2 + FF'' - \frac{1}{r} FF' \right) + \frac{1}{r} FF' \right], \tag{5.41}$$

donde: $n_1^z = \frac{R}{2r}$

Utilizando coordenadas cilíndricas: $dxdy = \rho d\rho d\phi$, donde:

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$r^2 = \rho^2 + \frac{R^2}{4}.$$

Integramos por ángulo, tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{F}_\perp &= \frac{4\pi\vec{a}_\perp}{m+w} \int_{R/2}^{\infty} (F')^2 \rho^2 \frac{dr}{r} \\ &= \frac{4\pi\vec{a}_\perp}{m+w} \int_{R/2}^{\infty} (F')^2 \left(r^2 - \frac{R^2}{4}\right) \frac{dr}{r}\end{aligned}$$

$$\text{como: } F = A \frac{e^{-\lambda r}}{r} \rightarrow F' = -A \left(\lambda \frac{e^{-\lambda r}}{r} + \frac{e^{-\lambda r}}{r^2} \right)$$

$$\vec{F}_\perp = \frac{4\pi\vec{a}_\perp A^2}{m+w} \int_{R/2}^{\infty} \left(\lambda^2 \frac{e^{-2\lambda r}}{r} - \frac{\lambda^2 R^2 e^{-2\lambda r}}{4} \frac{1}{r^3} + 2\lambda \frac{e^{-2\lambda r}}{r^2} - \frac{\lambda R^2 e^{-2\lambda r}}{2} \frac{1}{r^4} + \frac{e^{-2\lambda r}}{r^3} - \frac{R^2 e^{-2\lambda r}}{4} \frac{1}{r^5} \right) dr.$$

El desarrollo de esta integral se encuentran en el **Apellido 8.4**, el resultado de esta integral es la siguiente expresión

$$\vec{F}_\perp = \frac{4\pi\vec{a}_\perp A^2}{m+w} \left(2 \frac{e^{-\lambda R}}{R^2} - 2 \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda R^3} + 6 \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda^2 R^4} \right). \quad (5.42)$$

Ahora hallemos F_z , integrando por angulo, tenemos que:

$$\begin{aligned}F_z &= \frac{4\pi a_z}{m+w} \int_{R/2}^{\infty} \left[(F.F')' \frac{R^2}{4r} + F.F' \left(1 - \frac{R^2}{4r^2} \right) \right] dr \\ F_z &= \frac{4\pi a_z A^2}{m+w} \int_{R/2}^{\infty} \left[\left(2\lambda^2 \frac{e^{-2\lambda r}}{r^2} + 4\lambda \frac{e^{-2\lambda r}}{r^3} + 3 \frac{e^{-2\lambda r}}{r^4} \right) \frac{R^2}{4r} - \left(\lambda \frac{e^{-2\lambda r}}{r^2} + \frac{e^{-2\lambda r}}{r^3} \right) \left(1 - \frac{R^2}{4r^2} \right) \right] dr \\ F_z &= \frac{4\pi a_z A^2}{m+w} \int_{R/2}^{\infty} \left(-\lambda \frac{e^{-2\lambda r}}{r^2} + \frac{\lambda^2 R^2 e^{-2\lambda r}}{2} \frac{1}{r^3} - \frac{e^{-2\lambda r}}{r^3} + \frac{5\lambda R^2 e^{-2\lambda r}}{4} \frac{1}{r^4} + R^2 \frac{e^{-2\lambda r}}{r^5} \right)\end{aligned}$$

El desarrollo de esta integral esta en el **Apellido 8.5**, la expresión de F_z esta dado por

$$\begin{aligned}F_z &= \frac{8\pi a_z A^2}{m+w} e^{-\lambda R} \left(\frac{\lambda}{R} + \frac{1}{R^2} \right) \\ &= -\frac{d}{dR} \left(\frac{8\pi a_z A^2 e^{-\lambda R}}{m+w} \frac{1}{R} \right)\end{aligned} \quad (5.43)$$

De esta manera la fuerza de interacción entre solitones espinoriales resulta ser de tipo tensorial y depende de la orientación de los espines. Ademas la fuerza longitudinal (F_z) es semejante a la *ley de Yukawa*.

Como la fuerza longitudinal es proporcional al factor:

$$a_z = \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad \phi \in [-\pi, \pi] \quad \theta_i \in [0, \pi]; \quad (5.44)$$

entonces, la fuerza máxima de atracción se obtendrá cuando los espines son paralelos, orientados a lo largo de la linea que une sus centros, y dicha fuerza sera cero cuando ambos espines sean paralelos y orientados en la dirección **X** o **Y**.

Capítulo 6

INTERACCIÓN DE DOS VÓRTICES EN EL MODELO NIELSEN - OLESEN

En este capítulo se hallará la interacción entre dos solitones o vórtices en el modelo Nielsen - Olesen en la dirección \mathbf{Z} de la misma manera como se realizó en los capítulos 4 y 5, con la condición que estén los suficientemente separados; para ello haremos uso de la Densidad Lagrangiana de dicho modelo (3.43), volvamos escribir dicha expresión

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D^\mu\phi)^*(D_\mu\phi) - \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - \eta^2)^2.$$

Ahora para poder hallar dicha interacción, primero se debe de encontrar la solución asintótica del modelo, es decir para $r \rightarrow \infty$. Teniendo en cuenta esto vamos a usar el ansatz de Nielsen - Olesen para resolver este modelo, de acuerdo a [23] dicho ansatz es:

$$\phi = \eta f(r)e^{i\theta} \quad (6.1)$$

$$\vec{A} = \frac{v(r)}{er}\hat{e}_\theta. \quad (6.2)$$

Donde $f(r)$ y $v(r)$ son funciones radiales sin dimensión (las dimensiones de ϕ , A_μ , η y e se encuentran en el **Apéndice 8.6**), hay que recordar que estas soluciones están en coordenadas polares, debido que nuestro modelo es un modelo en (2+1) dimensiones. Y de acuerdo a nuestro ansatz estamos considerando campos independientes del tiempo y con un campo gauge $A_0 = 0$ como ya se menciona en la sección (3.4).

Reemplazando las soluciones (6.1) y (6.2) en las ecuaciones de movimiento (3.45) y (3.47), para si obtener las ecuaciones de movimiento en función de $f(r)$ y $v(r)$; dichas ecuaciones son:

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) - \frac{(1-v(r))^2}{r^2}f(r) - \lambda\eta^2(f^2(r) - 1)f(r) = 0 \quad (6.3)$$

$$v''(r) - \frac{1}{r}v'(r) + \eta^2e^2(1-v(r))f^2(r) = 0 \quad (6.4)$$

la demostración de estas ecuaciones se encuentran en los **Apéndices 8.7 y 8.8**.

Ahora si consideramos la siguiente relación $\eta^2 e^2 = 2$, por lo tanto, de acuerdo a las ecuaciones (3.52) y (3.53) la relación entre ellas sera:

$$\frac{m_H^2}{m_A^2} = \lambda \eta^2, \quad (6.5)$$

si llamamos $\beta = \lambda \eta^2$, las ecuaciones diferenciales (6.3) y (6.4) serán reescritas como:

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \frac{(1-v(r))^2}{r^2} f(r) - \beta(f^2(r) - 1)f(r) = 0 \quad (6.6)$$

$$v''(r) - \frac{1}{r} v'(r) + 2(1-v(r))f^2(r) = 0. \quad (6.7)$$

Analicemos estas dos ecuaciones para hallar las condiciones de frontera con un análisis a simple vista. Si nosotros hacemos que $r \rightarrow 0$, vemos que existiría términos que tenderían al infinito, por lo tanto para que exista una solución coherente, la condición de frontera debe ser

$$f(r) \rightarrow 0 \quad (6.8)$$

$$v(r) \rightarrow 0 \quad (6.9)$$

para $r \rightarrow 0$.

Ahora si hacemos que $r \rightarrow \infty$, veremos que la condición de frontera para que exista una solución coherente es

$$f(r) \rightarrow 1 \quad (6.10)$$

$$v(r) \rightarrow 1 \quad (6.11)$$

para $r \rightarrow \infty$.

Las soluciones asintóticas de $f(r)$ y $v(r)$ cuando $r \rightarrow \infty$ puede ser obtenidas si nosotros usamos el ansatz [23]:

$$f \rightarrow 1 + \delta f \quad (6.12)$$

$$v \rightarrow 1 + \delta v, \quad (6.13)$$

si se reemplaza este ansatz en las ecuaciones (6.6) y (6.7), y sin tan solo tenemos en cuenta los términos de δf a primer orden y para el caso de δv considerando todos los términos tendremos el siguiente sistema de ecuaciones (ver **Apéndice 8.9 y 8.10**):

$$\delta f'' + \frac{\delta f'}{r} - \frac{(\delta v)^2}{r^2} - 2\beta \delta f = 0 \quad (6.14)$$

$$\delta v'' - \frac{\delta v'}{r} - 2\delta v = 0. \quad (6.15)$$

Para resolver la ecuación (6.15) se usara el siguiente ansatz [23]:

$$\delta v = e^{-\xi r} r^\alpha (c_1 + c_2 r^{-1}) \quad (6.16)$$

e igualando los coeficientes de $e^{-\xi r} r^\alpha$ y $e^{\xi r} r^{\alpha-1}$ a 0 (ver **Apéndice 8.11**), obtenemos

$$\delta v = c_1 e^{-\sqrt{2}r} r^{1/2}, \quad (6.17)$$

donde c_1 y c_2 son constantes $\{1, -1\}$ [23]. Si $c_1 = c_v$, entonces la solución asintótica de $v(r)$ sera igual a

$$v(r) = 1 + c_v e^{-\sqrt{2}r} r^{1/2} \quad (6.18)$$

Ahora si sustituimos (6.17) en (6.14) y usando un ansatz similar a (6.16) para δf se obtendrá una solución particular y homogénea para la ecuación (6.14) cuando $r \gg 1$, dicho resultado es (ver **Apendice 8.12**):

$$\delta f = c_f \frac{e^{-\sqrt{2}\beta r}}{\sqrt{r}} - \frac{c_v^2}{2(\beta - 4)} \frac{e^{-2\sqrt{2}r}}{r}, \quad (6.19)$$

donde c_f es una constante $\{1, -1\}$ y las soluciones particular y homogénea son:

$$\begin{aligned} \delta f_h &= c_f \frac{e^{-\sqrt{2}\beta r}}{\sqrt{r}} && \text{solución homogénea} \\ \delta f_p &= -\frac{c_v^2}{2(\beta - 4)} \frac{e^{-2\sqrt{2}r}}{r} && \text{solución particular.} \end{aligned}$$

Analicemos la solución δf , vemos por un simple análisis que si $\beta \lesssim 4$ vemos que el denominador del segundo término tendería a infinito, por lo que seria razonable considerar que $\delta f \rightarrow \delta f_h$, y si analizamos el caso cuando $\beta > 4$ el segundo término sera la que predomina que la primera, por lo tanto, tendremos dos casos para la solución δf , las cuales son:

$$\delta f \rightarrow c_f \frac{e^{-\sqrt{2}\beta r}}{\sqrt{r}} \quad \beta \lesssim 4; \quad (6.20)$$

$$\delta f \rightarrow -\frac{c_v^2}{2(\beta - 4)} \frac{e^{-2\sqrt{2}r}}{r} \quad \beta > 4. \quad (6.21)$$

Por lo cual, la solución asintotica de $f(r)$ será igual a

$$f(r) = \begin{cases} 1 + c_f \frac{e^{-\sqrt{2}\beta r}}{\sqrt{r}} & \text{si } \beta \lesssim 4 \\ 1 - \frac{c_v^2}{2(\beta - 4)} \frac{e^{-2\sqrt{2}r}}{r} & \text{si } \beta > 4 \end{cases} \quad (6.22)$$

Para hallar la interacción entre dos solitones en la dirección \mathbf{Z} , se analizara dos solitones que forman un estado ligado de gran dimension \mathbf{R} ($R = |\vec{R}_1 + \vec{R}_2| \gg 1$) es decir muy separadas entre ellas cuyos centros se encuentran en el eje \mathbf{Z} , el diagrama de la disposición de estos solitones se muestra en la figura 6.1.

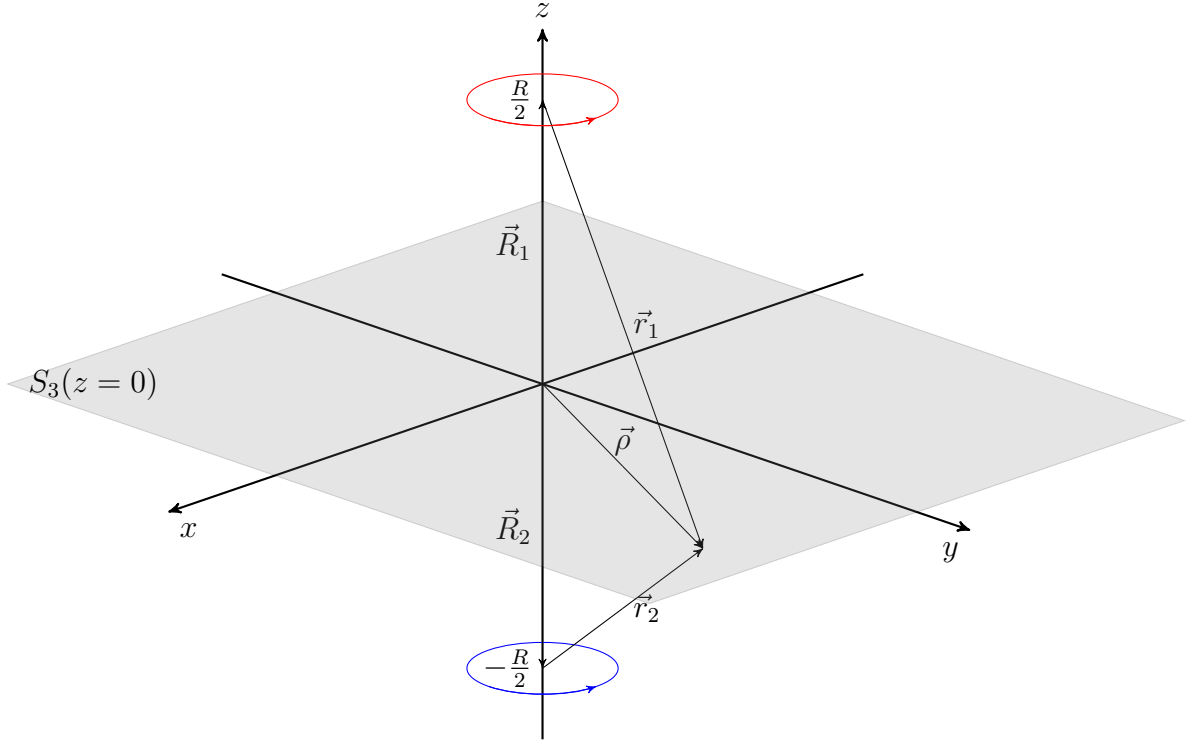


Figura 6.1: Disposición de dos vórtices que forman un estado ligado de radio muy largo $R = |\vec{R}_1 + \vec{R}_2| \gg 1$, cuyos centros se encuentran en el eje \mathbf{Z} y están separados simétricamente por el plano $Z = 0$

La solución cuasiestática del sistema es aproximadamente la suma:

$$\Phi = \phi_1 + \phi_2. \quad (6.23)$$

Si los vórtices son iguales $\phi_1 = \phi_2 = \phi$, entonces el campo escalar del sistema ligado (6.23) es $\Phi = 2\phi$, entonces de acuerdo al ansatz (6.1) se tendrá que

$$\Phi = 2\eta f(r)e^{i\theta}. \quad (6.24)$$

Ahora como sabemos la ecuación (2.69) nos permitirá hallar la interacción en la dirección \mathbf{Z} entre dos solitones en una dirección deseada y como estamos considerando soluciones cuasiestáticas entonces, la integral de dicha fuerza sera

$$\mathcal{F}^3 = - \oint T^{k3} dS_k,$$

como deseamos la interacción solo en la dirección \mathbf{Z} entonces, solo integraremos solo en el plano $Z = 0$ (S_3), entonces la integral de la fuerza de interacción es

$$\mathcal{F}^3 = - \int T^{33} dx dy. \quad (6.25)$$

Ahora para hallar dicha fuerza antes debemos hallar el término T^{33} del Tensor Energía - Momento, hallemos dicho término.

De acuerdo a (3.31) el tensor $T^{\mu\nu}$ es escrito como

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[(D^\mu\Phi)^*(D^\nu\Phi) + (D^\mu\Phi)(D^\nu\Phi)^*] - g_{\alpha\beta}F^{\mu\beta}F^{\nu\alpha} - g^{\mu\nu}\mathcal{L},$$

entonces, el termino T^{33} será

$$T^{33} = \frac{1}{2}[(D^3\Phi)^*(D^3\Phi) + (D^3\Phi)(D^3\Phi)^*] - g_{\alpha\beta}F^{3\beta}F^{3\alpha} + \mathcal{L}.$$

Pero como Φ es una solución en coordenadas polares por ello $\partial^3\Phi|_{z=0}$, además A_μ no tiene componentes en la dirección \mathbf{Z} ($A_3 = 0$) entonces $\partial^3A^\beta = 0$, por lo tanto, el término T^{33} será igual a

$$T^{33} = \mathcal{L}. \quad (6.26)$$

Vemos que el término T^{33} el cual nos permitirá encontrar la fuerza de interacción es igual a la Densidad Lagrangiana, por lo tanto, debemos desarrollar dicha Densidad Lagrangiana con un campo escalar igual a Φ teniendo en cuenta que nosotros estamos usando la configuración de campos que fue planteado en (3.33) y (3.34), presentamos el desarrollo de dicha Densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{ij})(F^{ij}) + \frac{1}{2}(D^i\Phi)^*(D_i\Phi) - \frac{\lambda}{4}(|\Phi|^2 - 4\eta^2)^2,$$

por la teoría electromagnética [16] tenemos que $F_{ij} = \epsilon_{ijk}B_k$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}(\epsilon_{ijk}B_k)(\epsilon_{ijl}B_l) + \frac{1}{2}(\partial^i\Phi^* + ieA^i\Phi^*)(\partial_i\Phi - ieA_i\Phi) - \frac{\lambda}{4}(|\Phi|^2 - 4\eta^2)^2 \\ \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl}B_kB_l + \frac{1}{2}[(\partial^i\Phi^*)(\partial_i\Phi) - ie\Phi A_i(\partial^i\Phi^*) + ie\Phi^* A^i(\partial_i\Phi) + e^2 A^i A_i |\Phi|^2] - \\ &\quad \frac{\lambda}{4}(|\Phi|^2 - 4\eta^2)^2 \end{aligned}$$

por propiedad del tensor Levi - Civita $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{\vec{B}^2}{2} + \frac{1}{2}[-(\nabla\Phi^*) \cdot (\nabla\Phi) + ie\Phi(\vec{A} \cdot \nabla\Phi^*) - ie\Phi^*(\vec{A} \cdot \nabla\Phi) - e^2 \vec{A}^2 |\Phi|^2] - \\ &\quad \frac{\lambda}{4}(|\Phi|^2 - 4\eta^2)^2 \end{aligned}$$

pero $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{|\nabla \times \vec{A}|^2}{2} + \frac{1}{2}[-(\nabla\Phi^*) \cdot (\nabla\Phi) + ie\Phi(\vec{A} \cdot \nabla\Phi^*) - ie\Phi^*(\vec{A} \cdot \nabla\Phi) - e^2 \vec{A}^2 |\Phi|^2] - \\ &\quad \frac{\lambda}{4}(|\Phi|^2 - 4\eta^2)^2. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Ahora que se pudo expresar la Densidad Lagrangiana en función de los campos \vec{A} y Φ , la integral de interacción será la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^3 &= - \int \left[-\frac{|\nabla \times \vec{A}|^2}{2} + \frac{1}{2}[-(\nabla\Phi^*) \cdot (\nabla\Phi) + ie\Phi(\vec{A} \cdot \nabla\Phi^*) - ie\Phi^*(\vec{A} \cdot \nabla\Phi) - e^2 \vec{A}^2 |\Phi|^2] - \right. \\ &\quad \left. \frac{\lambda}{4}(|\Phi|^2 - 4\eta^2)^2 \right] dx dy \\ \mathcal{F}^3 &= \int \left[\frac{|\nabla \times \vec{A}|^2}{2} + \frac{1}{2}[(\nabla\Phi^*) \cdot (\nabla\Phi) - ie\Phi(\vec{A} \cdot \nabla\Phi^*) + ie\Phi^*(\vec{A} \cdot \nabla\Phi) + e^2 \vec{A}^2 |\Phi|^2] + \right. \\ &\quad \left. \frac{\lambda}{4}(|\Phi|^2 - 4\eta^2)^2 \right] dx dy, \end{aligned}$$

Se hace una observación a la Densidad Lagrangiana (6.27), se ve que se colocó 4 al coeficiente que multiplica a η^2 en el término del potencial, el porque de este coeficiente es para poder evitar la divergencia que ocurre en el último término de la integral de interacción, ya que si no se coloca este coeficiente se tendría la siguiente integral.

$$\int \frac{\lambda}{4} (|\Phi|^2 - \eta^2)^2 dx dy = \frac{\lambda \eta^2}{4} \int (4f^2(r) - 1)^2 dx dy = \frac{\lambda \eta^2}{4} \int (4(1 + \delta f)^2 - 1)^2 dx dy$$

y como se puede apreciar esta integral diverge ya que se integra en todo el espacio, por ello, es necesario que el coeficiente de η^2 sea 4 para evitar esta divergencia.

Los términos de la integral de interacción en función de $f(r)$ y $v(r)$ son los siguientes:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} &= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\theta & A_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r \left(\frac{v(r)}{er} \right) & 0 \end{vmatrix} \\ \nabla \times \vec{A} &= \frac{v'(r)}{er} \hat{e}_z; \\ (\nabla \Phi^*) \cdot (\nabla \Phi) &= \left(2\eta f'(r) e^{-i\theta} \hat{e}_r - 2i\eta \frac{f(r)}{r} e^{-i\theta} \hat{e}_\theta \right) \cdot \left(2\eta f'(r) e^{i\theta} \hat{e}_r + 2i\eta \frac{f(r)}{r} e^{i\theta} \hat{e}_\theta \right) \\ (\nabla \Phi^*) \cdot (\nabla \Phi) &= 4\eta^2 f'^2(r) + 4\eta^2 \frac{f^2(r)}{r^2}; \\ \vec{A} \cdot \nabla \Phi^* &= -\frac{2i\eta}{e} \frac{f(r)v(r)}{r^2} e^{-i\theta}; \\ \vec{A} \cdot \nabla \Phi &= \frac{2i\eta}{e} \frac{f(r)v(r)}{r^2} e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Siendo así la integral \mathcal{F}^3 será expresada en términos de las funciones $f(r)$ y $v(r)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^3 &= \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{v'(r)}{er} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(4\eta^2 f'^2(r) + 4\eta^2 \frac{f^2(r)}{r^2} \right) - \frac{ie}{2} (2\eta f(r) e^{i\theta}) \left(-\frac{2i\eta}{e} \frac{f(r)v(r)}{r^2} e^{-i\theta} \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{ie}{2} (2\eta f(r) e^{-i\theta}) \left(\frac{2i\eta}{e} \frac{f(r)v(r)}{r^2} e^{i\theta} \right) + \frac{e^2}{2} \left(\frac{v(r)}{er} \right)^2 (4\eta^2 f^2(r)) + \frac{\lambda}{4} (4\eta^2 f^2(r) - 4\eta^2)^2 \right] dx dy \\ \mathcal{F}^3 &= \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{v'(r)}{er} \right)^2 + 2\eta^2 \left(f'^2(r) + \frac{f^2(r)}{r^2} \right) - 2\eta^2 \frac{f^2(r)v(r)}{r^2} - 2\eta^2 \frac{f^2(r)v(r)}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. 2\eta^2 \frac{f^2(r)v^2(r)}{r^2} + 4\eta^4 \lambda (f^2(r) - 1)^2 \right] dx dy \\ \mathcal{F}^3 &= \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{v'(r)}{er} \right)^2 + 2\eta^2 \left(f'^2(r) + \frac{f^2(r)}{r^2} \right) - 4\eta^2 \frac{f^2(r)v(r)}{r^2} + 2\eta^2 \frac{f^2(r)v^2(r)}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. + 4\eta^4 \lambda (f^2(r) - 1)^2 \right] dx dy, \end{aligned}$$

ordenando y simplificando se obtendrá:

$$\mathcal{F}^3 = \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{v'(r)}{er} \right)^2 + 2\eta^2 \left(f'^2(r) + \frac{f^2(r)}{r^2} \right) + 2\eta^2 \frac{f^2(r)}{r^2} (v^2(r) - 2v(r)) + 4\eta^4 \lambda (f^2(r) - 1)^2 \right] dx dy$$

Se ha mencionado que para hallar la interacción debemos integrar solo en el plano $Z = 0$, entonces

$$dx dy = \rho d\rho d\theta,$$

de acuerdo a la figura 6.1 vemos que

$$\vec{r}_i = \vec{R}_i + \vec{\rho} \quad |\vec{R}_i| = \frac{R}{2};$$

entonces

$$r^2 = \frac{R^2}{4} + \rho^2,$$

por lo tanto

$$r dr = \rho d\rho.$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^3 &= \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{v'(r)}{er} \right)^2 + 2\eta^2 \left(f'^2(r) + \frac{f^2(r)}{r^2} \right) + 2\eta^2 \frac{f^2(r)}{r^2} (v^2(r) - 2v(r)) + 4\eta^4 \lambda (f^2(r) - 1)^2 \right] r dr d\theta \\ \mathcal{F}^3 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{v'(r)}{er} \right)^2 + 2\eta^2 \left(f'^2(r) + \frac{f^2(r)}{r^2} \right) + 2\eta^2 \frac{f^2(r)}{r^2} (v^2(r) - 2v(r)) + 4\eta^4 \lambda (f^2(r) - 1)^2 \right] r dr \\ \mathcal{F}^3 &= 2\pi \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{2} \left(\frac{v'(r)}{er} \right)^2 \right]}_{\text{I}} + \underbrace{\left[2\eta^2 \left(f'^2(r) + \frac{f^2(r)}{r^2} \right) \right]}_{\text{II}} + \underbrace{\left[2\eta^2 \frac{f^2(r)}{r^2} (v^2(r) - 2v(r)) \right]}_{\text{III}} + \underbrace{\left[4\eta^4 \lambda (f^2(r) - 1)^2 \right]}_{\text{IV}} r dr. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Enfatizando que las funciones $f(r)$ y $v(r)$ son las soluciones asintóticas del modelo, de acuerdo a (6.22) se ve que existe dos posibles casos para la función $f(r)$, por ende la integral (6.28) tendrá dos posibles soluciones. Dicha integral se ha dividido en cuatro partes para que la solución sea mas clara, en el desarrollo de estas integrales se usara constantemente la siguiente integral

$$\int \frac{e^{-\alpha r}}{r^\beta} dr = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{d^n}{dk^n} \left(\frac{1}{k^\beta} \right) \Big|_{k=1} \frac{e^{-\alpha r}}{\alpha^{n+1} r^{\beta+n}} \quad (6.29)$$

ver **Apéndice 8.13**. El desarrollo de las integrales **I**, **II**, **III** y **IV** (ver **Apéndice 8.14** para $\beta \lesssim 4$ y **Apéndice 8.15** para $\beta > 4$) considerando solo términos con un orden ≥ -1 de r dado que $r \gg 1$, y el resultado de (6.28) para los dos posibles casos se muestran a continuación.

a) Para $\beta \lesssim 4$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^3 = & 2\pi \left[\frac{c_v^2}{2e^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\sqrt{2}R} - \frac{e^{-\sqrt{2}R}}{R} \right) + 2\eta^2 \left(\ln(r) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} + \frac{c_f^2 \sqrt{2\beta}}{2} e^{-\sqrt{2\beta}R} + c_f^2 \frac{e^{-\sqrt{2\beta}R}}{R} \right) + \right. \\ & 2\eta^2 \left(-\ln(r) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} + \frac{c_v^2 \sqrt{2}}{4} e^{-\sqrt{2}R} + \frac{2c_f c_v^2}{(\sqrt{\beta} + 2)} \frac{e^{-(\sqrt{2\beta} + 2\sqrt{2})R/2}}{R^{1/2}} + \right. \\ & \left. \left. \frac{c_f^2 c_v^2 \sqrt{2}}{2(\sqrt{\beta} + 1)} \frac{e^{-(\sqrt{2\beta} + \sqrt{2})R}}{R} \right) + 4\eta^4 \lambda \left(\frac{c_f^2 \sqrt{2\beta}}{\beta} e^{-\sqrt{2\beta}R} + \frac{4c_f^3 \sqrt{\beta}}{3\beta} \frac{e^{-3\sqrt{2\beta}R/2}}{R^{1/2}} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{c_f^4 \sqrt{2\beta}}{4\beta} \frac{e^{-2\sqrt{2\beta}R}}{R} \right) \right], \end{aligned}$$

ordenando y agrupando se tendrá que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^3 = & \left(\frac{\pi c_v^2 \sqrt{2}}{2e^2} + \pi \eta^2 c_v^2 \sqrt{2} \right) e^{-\sqrt{2}R} + \left(2\pi \eta^2 c_f^2 \sqrt{2\beta} + \frac{8\pi \eta^4 \lambda c_f^2 \sqrt{2\beta}}{\beta} \right) e^{-\sqrt{2\beta}R} + \\ & \frac{8\pi \eta^2 c_f c_v^2}{(\sqrt{\beta} + 2)} \frac{e^{-(\sqrt{2\beta} + 2\sqrt{2})R/2}}{R^{1/2}} + \frac{32\pi \eta^4 \lambda c_f^3 \sqrt{\beta}}{3\beta} \frac{e^{-3\sqrt{2\beta}R/2}}{R^{1/2}} - \frac{\pi c_v^2}{e^2} \frac{e^{-\sqrt{2}R}}{R} + 4\pi \eta^2 c_f^2 \frac{e^{-\sqrt{2\beta}R}}{R} + \\ & \frac{2\pi \eta^2 c_f^2 c_v^2 \sqrt{2}}{(\sqrt{\beta} + 1)} \frac{e^{-(\sqrt{2\beta} + \sqrt{2})R}}{R} + \frac{2\pi \eta^4 \lambda c_f^4 \sqrt{2\beta}}{\beta} \frac{e^{-2\sqrt{2\beta}R}}{R}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\beta = \lambda \eta^2$ y $\eta^2 e^2 = 2$, la expresión \mathcal{F}^3 sera escrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^3 = & \frac{5\pi \eta^2 c_v^2 \sqrt{2}}{4} e^{-\sqrt{2}R} + 10\pi \eta^2 c_f^2 \sqrt{2\beta} e^{-\sqrt{2\beta}R} + \frac{8\pi \eta^2 c_f c_v^2}{(\sqrt{\beta} + 2)} \frac{e^{-(\sqrt{2\beta} + 2\sqrt{2})R/2}}{R^{1/2}} + \\ & \frac{32\pi \eta^2 c_f^3 \sqrt{\beta}}{3} \frac{e^{-3\sqrt{2\beta}R/2}}{R^{1/2}} - \frac{\pi \eta^2 c_v^2}{2} \frac{e^{-\sqrt{2}R}}{R} + 4\pi \eta^2 c_f^2 \frac{e^{-\sqrt{2\beta}R}}{R} + \\ & \frac{2\pi \eta^2 c_f^2 c_v^2 \sqrt{2}}{(\sqrt{\beta} + 1)} \frac{e^{-(\sqrt{2\beta} + \sqrt{2})R}}{R} + 2\pi \eta^2 c_f^4 \sqrt{2\beta} \frac{e^{-2\sqrt{2\beta}R}}{R}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Como se aprecia la expresión de la fuerza de interacción (6.30) es una expresión muy larga pero podemos aproximarla a una función más corta si analizamos cada termino de la expresión e identificamos los términos que tienden más rápido a cero. Nos podemos dar cuenta que los términos que tienden más rápido a cero son aquellos términos con R^{-n} ($n \in \mathbb{Q}$) cuyos exponentes del numero e sean los más negativos posible, en consecuencia la expresión (6.30) quedaría reducida a la

siguiente expresión

$$\mathcal{F}^3 = \frac{5\pi\eta^2 c_v^2 \sqrt{2}}{4} e^{-\sqrt{2}R} + 10\pi\eta^2 c_f^2 \sqrt{2\beta} e^{-\sqrt{2\beta}R} - \frac{\pi\eta^2 c_v^2 e^{-\sqrt{2}R}}{2R} + \frac{4\pi\eta^2 c_f^2 e^{-\sqrt{2\beta}R}}{R}. \quad (6.31)$$

b) Para $\beta > 4$:

$$\mathcal{F}^3 = 2\pi \left[\frac{c_v^2}{2e^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\sqrt{2}R} - \frac{e^{-\sqrt{2}R}}{R} \right) + 2\eta^2 \left(\ln(r) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} + \frac{c_v^4 \sqrt{2}}{(\beta-4)^2} \frac{e^{-2\sqrt{2}R}}{R} \right) + 2\eta^2 \left(-\ln(r) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} + \frac{c_v^2 \sqrt{2}}{4} e^{-\sqrt{2}R} - \frac{c_v^4 \sqrt{2}}{4(\beta-4)} \frac{e^{-2\sqrt{2}R}}{R} \right) + \frac{\eta^4 \lambda c_v^4 \sqrt{2}}{(\beta-4)} \frac{e^{-2\sqrt{2}R}}{R} \right],$$

ordenando y agrupando se obtendrá que

$$\mathcal{F}^3 = \left(\frac{\pi c_v^2 \sqrt{2}}{2e^2} + \pi\eta^2 c_v^2 \sqrt{2} \right) e^{-\sqrt{2}R} - \frac{\pi c_v^2 e^{-\sqrt{2}R}}{e^2 R} + \left[\frac{4\pi\eta^2 c_v^4 \sqrt{2}}{(\beta-4)^2} - \frac{\pi\eta^2 c_v^4 \sqrt{2}}{(\beta-4)} + \frac{2\pi\eta^4 \lambda c_v^4 \sqrt{2}}{(\beta-4)} \right] \frac{e^{-2\sqrt{2}R}}{R}.$$

Considerando que $\beta = \lambda\eta^2$ y $\eta^2 e^2 = 2$, la expresión \mathcal{F}^3 sera escrito como

$$\mathcal{F}^3 = \frac{5\pi\eta^2 c_v^2 \sqrt{2}}{4} e^{-\sqrt{2}R} - \frac{\pi\eta^2 c_v^2 e^{-\sqrt{2}R}}{2R} + \left[\frac{4\pi\eta^2 c_v^4 \sqrt{2}}{(\beta-4)^2} - \frac{\pi\eta^2 c_v^4 \sqrt{2}}{(\beta-4)} + \frac{2\pi\eta^2 \beta c_v^4 \sqrt{2}}{(\beta-4)} \right] \frac{e^{-2\sqrt{2}R}}{R}. \quad (6.32)$$

Ahora que se halló la fuerza de interacción entre dos solitones para los dos casos ya presentados, entonces podemos graficar dichas fuerzas en función de R , las gráficas de dichas fuerzas para ambos casos se presentan en la siguiente figura.

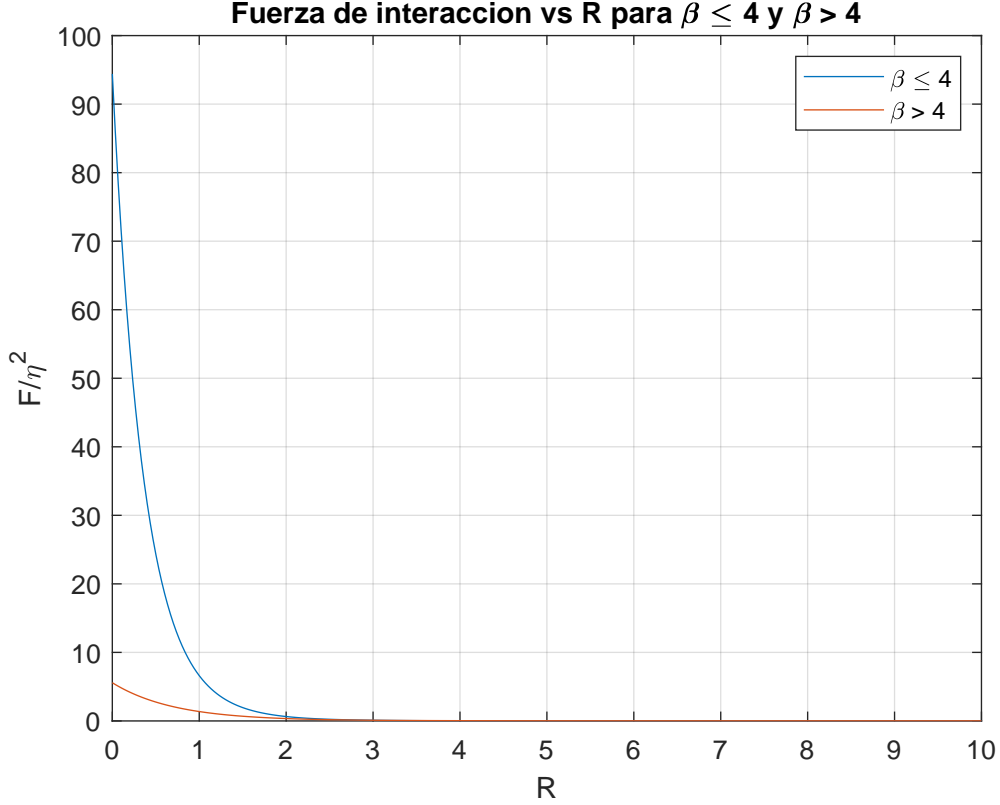


Figura 6.2: Gráfica de \mathcal{F}^3/η^2 vs R para $\beta \lesssim 4$ (curva azul) y $\beta > 4$ (curva roja)

De la figura 6.2 se puede apreciar que se trata de una fuerza de atracción para ambos casos. Haciendo un análisis de las curvas se aprecia que para el caso $\beta > 4$ (curva roja) la curva tiende más rápido a cero que para el caso $\beta \lesssim 4$ (curva azul).

Entonces, recordando que $\beta = m_H^2/m_A^2$, por lo tanto, de acuerdo al análisis del gráfico 6.2 podemos inferir que la interacción será más intensa cuando

$$m_H \lesssim 2m_A. \quad (6.33)$$

En otras palabras será más intensa la fuerza de interacción entre dos vortices cuando la masa de Higgs sea menor y cercano al doble de la masa del campo gauge.

De acuerdo a nuestro ansatz (6.2) para el campo \vec{A} , podemos encontrar el campo magnético \vec{B} asociado a dicho campo de acuerdo a la relación

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A},$$

entonces

$$\vec{B} = \nabla \times \left(\frac{v(r)}{er} \right) \hat{e}_\theta,$$

por lo tanto

$$\vec{B} = \frac{v'(r)}{er} \hat{e}_z. \quad (6.34)$$

De acuerdo a (6.34) vemos que el campo magnético \vec{B} asociado a nuestro potencial vectorial \vec{A} está orientado en la dirección Z.

Si aplicamos la divergencia al potencial vectorial \vec{A} obtenemos que

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v(r)}{er} \right),$$

de modo que

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (6.35)$$

La ecuación (6.35) corresponde al *Gauge de Coulomb*. Si aplicamos la *Ley de Ampere-Maxwell* [16] (en unidades naturales):

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

teniendo en cuenta que $\vec{E} = 0$ y $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, se tendrá que

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \vec{J} \quad (6.36)$$

usando la identidad vectorial

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}, \quad (6.37)$$

pero debido al *Gauge de Coulomb* ($\nabla \cdot \vec{A} = 0$), la identidad vectorial (6.37) se escribirá como

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = -\nabla^2 \vec{A}. \quad (6.38)$$

Reemplazando (6.36) en (6.38) se tendrá la siguiente relación

$$\vec{J} = -\nabla^2 \vec{A} \quad (6.39)$$

sustituyendo la expresión del potencial vectorial \vec{A} , obtendremos la expresión de la densidad de corriente:

$$\vec{J} = \frac{1}{er} \left(\frac{v'(r)}{r} - v''(r) \right) \hat{e}_\theta. \quad (6.40)$$

Acorde a (6.40) vemos que alrededor de la ubicación del solitón existe una corriente que circula en la dirección \hat{e}_θ .

De acuerdo a nuestra figura 6.1, hemos dispuesto dos solitones que están muy separadas entre ellas y conforme a (6.40) en cada ubicación de los solitones circula una corriente alrededor de ellas como se bosqueja en la figura 6.1, entonces la interacción entre ellas podemos compararlo con la interacción entre dos espiras con corriente en el mismo sentido de circulación y muy alejadas entre ellas.

Entonces, analicemos la interacción entre dos espiras con corriente en la misma dirección muy alejadas entre ellas, que se estudia en la Teoría Electromagnética y compararemos que tanto se asemeja a la interacción entre dos vórtices. Si tenemos una espira con corriente de radio a como se representa en la figura 6.3 el objetivo sera hallar el campo magnético producido por dicha espira en cualquier punto del espacio.

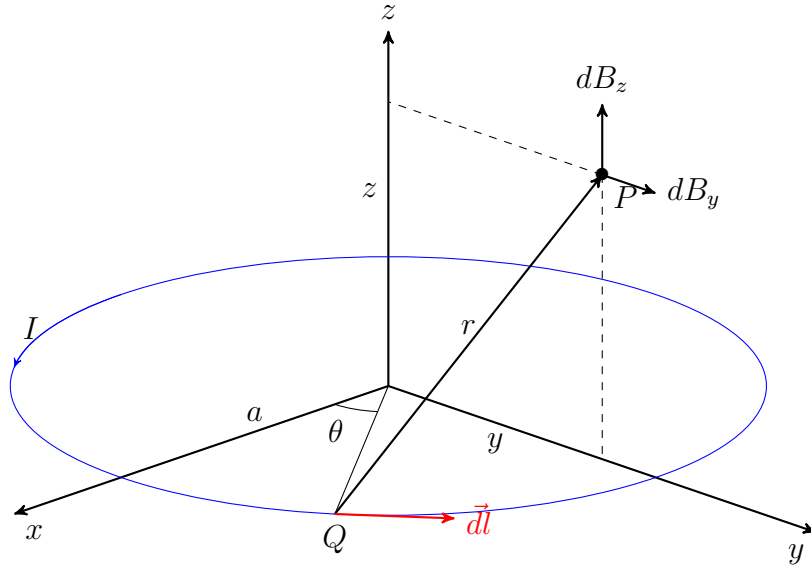


Figura 6.3: Espira de radio a ubicado en el plano \mathbb{XY} en la cual circula una corriente I .

De acuerdo a la *Ley de Biot* el campo magnético producido por la espira se obtiene a partir de

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I \vec{dl} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (6.41)$$

Donde \vec{dl} es un vector de elemento de corriente el cual señala la dirección y sentido de la corriente, y r es la distancia de la posición del elemento de corriente al punto P donde se calcula el campo magnético.

Acorde a la figura 6.3 el punto P esta ubicado en la posición $(0, y, z)$ y el punto Q en donde esta ubicado el elemento de corriente esta en la posición $(a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \vec{r} &= -a \cos \theta \hat{i} + (y - a \sin \theta) \hat{j} + z \hat{k} \quad \text{y} \\ \vec{dl} &= a d\theta \hat{e}_\theta = -a \sin \theta d\theta \hat{i} + a \cos \theta d\theta \hat{j}. \end{aligned}$$

Efectuando el producto vectorial $\vec{dl} \times \vec{r}$, se tendrá las siguientes componentes del campo

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0 I a z}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^3} d\theta \\ B_y &= \frac{\mu_0 I a z}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{r^3} d\theta \\ B_z &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a - y \sin \theta}{r^3} d\theta. \end{aligned}$$

Debido a la simetría axial la integral de $B_x = 0$, debido que para cada elemento de corriente dl existe otro simétrico al plano \mathbb{OYZ} el cual anula la componente X del campo, por lo tanto, solo tendremos dos componentes del campo uno a lo largo del eje de simetría

Z B_z y la otra en la dirección radial B_y

$$B_y = \frac{\mu_0 I a z}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin \theta}{(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \theta)^{3/2}} d\theta$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a - y \sin \theta}{(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \theta)^{3/2}} d\theta.$$

Si consideramos que el punto P esta lo suficientemente lejos de la espira, se cumplirá que

$$\sqrt{z^2 + y^2} \gg a,$$

si denominamos

$$r = \sqrt{z^2 + y^2}.$$

Entonces, los denominadores de las integrales de las componentes del campo magnético \vec{B} se puede aproximar como

$$(a^2 + r^2 - 2ay \sin \theta)^{-3/2} \approx r^{-3} \left(1 - \frac{2ay \sin \theta}{r^2}\right)^{-3/2} \approx r^{-3} \left(1 + \frac{3ay \sin \theta}{r^2}\right)^{-3/2}.$$

Por lo tanto, las componentes del campo \vec{B} se aproximarán a las siguientes componentes:

$$B_y \approx \frac{\mu_0 I a z}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{r^3} \left(1 + \frac{3ay \sin \theta}{r^2}\right) \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I a z}{2\pi r^3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\sin \theta + \frac{3ay \sin^2 \theta}{r^2}\right) d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I a z}{2\pi r^3} \left[-\cos \theta + \frac{3ay}{2r^2} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta\right)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\mu_0 I a^2}{4r^3} \left(\frac{3yz}{r^2}\right)$$

$$B_z \approx \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(a - y \sin \theta)}{r^3} \left(1 + \frac{3ay \sin \theta}{r^2}\right) d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{2\pi r^3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(a - y \sin \theta + \frac{3a^2 y \sin \theta}{r^2} - \frac{3ay^2 \sin^2 \theta}{r^2}\right) d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{2\pi r^3} \left[a\theta + y \cos \theta - \frac{3a^2 y \cos \theta}{r^2} - \frac{3ay^2}{2r^2} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta\right)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3} \left(1 - \frac{3y^2}{2r^2}\right) = \frac{\mu_0 I a^2}{4r^3} \left(\frac{3z^2}{r^2} - 1\right).$$

Por ello, las componentes del campo magnético de una espira para puntos alejados ($r \gg a$) de ella serán aproximadamente igual a

$$B_y = \frac{\mu_0 I a^2}{4r^3} \left(\frac{3yz}{r^2}\right) \quad (6.42)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3} \left(1 - \frac{3y^2}{2r^2}\right) = \frac{\mu_0 I a^2}{4r^3} \left(\frac{3z^2}{r^2} - 1\right). \quad (6.43)$$

Si utilizamos el concepto de *momento dipolar magnético*, entonces el momento dipolar de la espira sera $\vec{m} = \pi a^2 I \hat{k}$ y apunta en la dirección Z como se muestra en la figura 6.4.

Por lo tanto, usando el concepto de momento dipolar magnético, las dos componentes del campo magnético B_y y B_z en el punto $P(y, z)$ se puede expresar en una única expresión

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5} \quad (6.44)$$

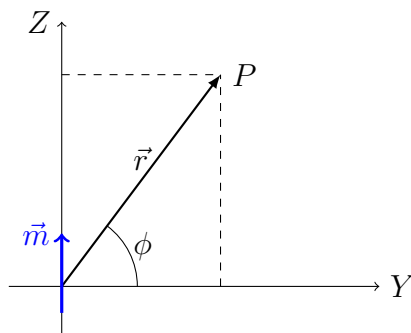


Figura 6.4: Dipolo magnético con un momento igual a \vec{m} .

Si analizamos dos espiras en planos paralelos con un eje común en \mathbf{Z} distanciadas una distancia z mucho mayor a los radios de cada una de las espiras, donde en una espira de radio a circula una corriente I_1 y en la otra espira de radio b circula una corriente I_2 además las corrientes en cada una de ellas circulan en la misma dirección como se representa en la figura 6.5.

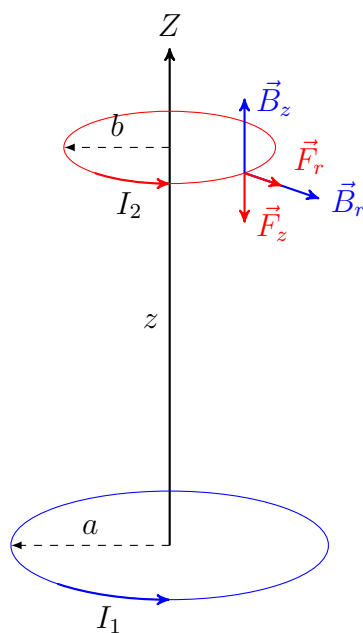


Figura 6.5: Interacción entre dos espiras en planos paralelos en las cuales circulan corrientes en la misma dirección separadas una distancia z la cual es mucho mayor a las dimensiones de las espiras.

La fuerza de Lorentz que ejerce el campo magnético que produce la espira de radio a sobre la espira de radio b en la que circula una corriente I_2 estará dado por la expresión

$$\vec{F} = \oint_C I_2 \vec{dl} \times \vec{B}_a \quad (6.45)$$

Como se comprobó la espira de radio a produce un campo magnético con una componente en Z \vec{B}_z y una componente radial \vec{B}_r . La fuerza que produce la componente \vec{B}_z produce una fuerza en la dirección radial \vec{F}_r , pero, debido a la simetría axial la fuerza neta en la dirección radial sera cero.

La fuerza que produce la componente \vec{B}_r produce una fuerza en la dirección Z, y esta fuerza es una fuerza de *atracción*. Si las corrientes tendrían sentidos contrarios esta fuerza sería de *repulsión*, esta fuerza de *atracción* es igual a

$$\begin{aligned}\vec{F}_z &= I_2 \oint_C \vec{dl} \times \vec{B}_r \\ &= I_2 \int_0^{2\pi} b d\theta \hat{e}_\theta \times B_r \hat{e}_r \\ &= -2\pi I_2 b B_r \hat{e}_z\end{aligned}\tag{6.46}$$

Como estamos considerando que ambas espiras están muy alejadas entre ellas, la espira de radio a la aproximamos a un dipolo magnético, por lo tanto, introduzcamos la componente radial del campo magnético B_r (6.42) con $y = b$ en (6.46), la fuerza de atracción será igual a

$$\begin{aligned}\vec{F}_z &= -2\pi I_2 b \left(\mu_0 I_1 a^2 \frac{3bz}{4(\sqrt{z^2 + b^2})^5} \right) \hat{e}_z \\ &= -\mu_0 I_1 I_2 a^2 b^2 \pi \frac{3z}{2(\sqrt{z^2 + b^2})^5} \hat{e}_z.\end{aligned}\tag{6.47}$$

Si supongamos que ambas espiras tienen el mismo radio a y si definimos el cociente $\gamma = z/a$, la expresión de F_z en la aproximación de dipolo magnético estará expresada como

$$F_z = \mu_0 I_1 I_2 \frac{3\pi}{2} \frac{\gamma}{(\sqrt{\gamma^2 + 1})^5}.\tag{6.48}$$

La representación de esta fuerza en función de γ se muestra en la siguiente figura

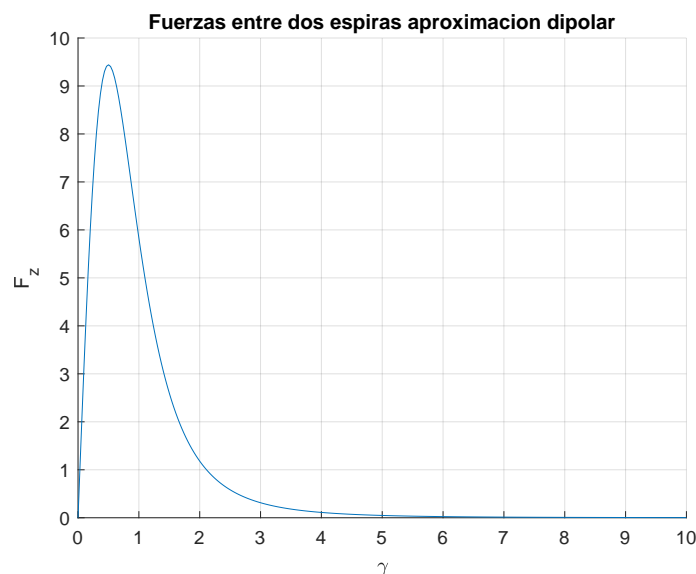


Figura 6.6: Gráfica de la fuerza entre dos espiras de igual radio en la aproximación dipolar.

Haciendo la comparación entre las gráficas 6.2 y 6.6 para poder observar que tanto coinciden entre ellas, el cual se muestra en la siguiente imagen

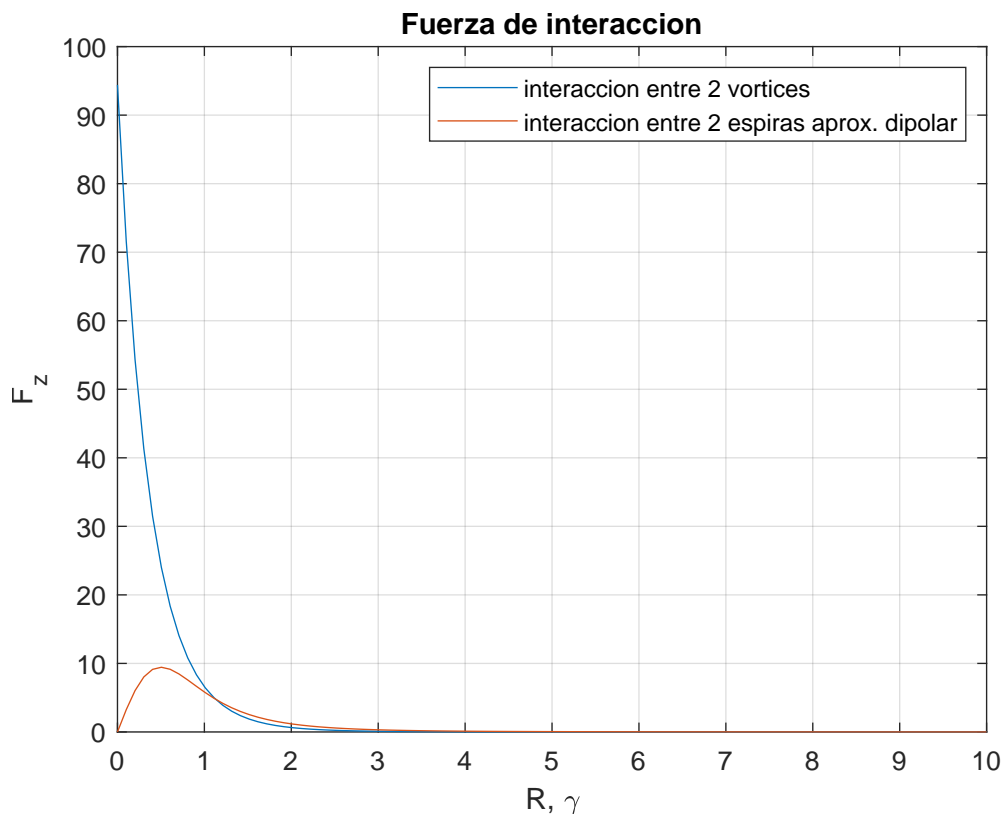


Figura 6.7: Gráfica de comparación entre las gráficas de la interacción entre 2 vórtices y la interacción entre 2 espiras en la aproximación dipolar (dipolos magnéticos).

De acuerdo a 6.7 se aprecia que la gráfica de la interacción entre dos espiras en la aproximación dipolar será similar bajo ciertos valores de corriente a la gráfica de la interacción entre dos vórtices cuando $\gamma = r/a \gg 1$.

Es decir, que la interacción entre dos vórtices es aproximadamente similar a la interacción entre dos dipolos magnéticos, cuando la separación entre estos dos dipolos sea mucho mayor a las dimensiones de cada una de ellas.

Capítulo 7

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

A lo largo del desarrollo de esta tesis, hemos estudiado y hallado la interacción con ayuda del Tensor Energía - Momento entre dos solitones en modelos no lineales que admiten una solución tipo solitón, dichos solitones eran las soluciones asintóticas de cada modelo estudiado.

En los capítulos 1 y 2, hemos expuesta la historia, los hallazgos, la importancia de la teoría de solitones como modelos de partículas y la teoría necesaria para el desarrollo de esta tesis.

En el capítulo 3, presentamos el Modelo de Nielsen - Olsen en la cual existe una solución tipo solitón llamado vórtice, en este capítulo también se desarrollo la condición necesaria para que exista una ruptura espontánea de la simetría y pueda existir una solución solitón. Así como también la demostración de la estabilidad de estas soluciones a través del Teorema de Derrick, la demostración de las ecuaciones de movimiento ((3.45), (3.47)), el desarrollo del Tensor Energía - Momento (3.31) que fue indispensable para el desarrollo del capítulo 6 y la explicación del Mecanismo de Higgs para dicho modelo con el fin de hallar las masas del Campo de Higgs (3.53) y del Campo Gauge (3.52).

Ya en el capítulo 4 se empezó a estudiar la interacción asintótica entre dos solitones en un modelo basado en la Ecuación No Lineal de Klein - Gordon. Este capítulo se dividió en dos casos; si el campo era simétrico con respecto a la transformación $z \rightarrow -z$ los solitones eran simétricos en caso contrario serían solitones asimétricos. Para ambos casos se pudo hallar la interacción entre dos solitones en la dirección \mathbf{Z} , la cual presenta un potencial similar al Potencial de Yukawa, el cual es un potencial que describe la interacción nuclear fuerte. Si bien la Ecuación de Klein - Gordon describe partículas con espín igual 0 por ejemplo a los mesones (boson) que responden a la interacción nuclear fuerte. Por lo tanto, podemos concluir que los solitones son buenos modelos para la interacción nuclear fuerte.

En el capítulo 5 se siguió con el objetivo de hallar la interacción entre dos solitones en El Modelo de Soler, a diferencia del capítulo 4 aquí los solitones presentan espín ya que la Ecuación de Dirac No Lineal describe a las partículas de espín 1/2. Para hallar la interacción en la dirección \mathbf{Z} entre dos solitones en este modelo hemos considerado

como en el caso anterior que los centros de los solitones se encuentran a lo largo del eje \mathbf{Z} y que están separadas una distancia mucho mayor a las dimensiones de cada solitón. En este caso se encontró una fuerza perpendicular que une sus centros \vec{F}_\perp (5.42) y una fuerza longitudinal F_z (5.43), lo interesante de estos resultados es la expresión de F_z . A diferencia del capítulo 4, la orientación de los espines de cada solitón afecta la intensidad de la interacción de acuerdo al factor a_z (5.44) que esta presente en la expresión de F_z . La única similitud que existe con respecto al capítulo anterior es la semejanza que existe entre F_z y la Interacción de Yukawa, de acuerdo a [2] vemos que la Interacción de Yukawa es un potencial que puede describir la interacción nuclear fuerte entre nucleones (protones y neutrones) mediada por los mesones (bosón) como partículas portadoras. Por lo tanto, podemos concluir que los solitones son buenos modelos para describir a los bosones, como partículas intermediarias en la interacción nuclear fuerte. Y la fuerza de interacción en la dirección \mathbf{Z} sera máxima cuando los espines sean paralelos y orientados a lo largo de la línea que une sus centros (eje \mathbf{Z}), y sera cero cuando ambos espines sean paralelos y orientados en la dirección \mathbf{X} o \mathbf{Y} .

Por último en el capítulo 6 que fue el capítulo principal de esta tesis. Igual que en los capítulos 4 y 5 el objetivo fue hallar la interacción asintótica de dos solitones en la dirección \mathbf{Z} . La configuración de dichos solitones o vórtices en este caso fue igual que en los casos anteriores donde el centro de cada solitón están a lo largo del eje \mathbf{Z} y la separación entre ellos es mayor a la dimensión de cada uno de ellos. El único inconveniente para hallar la fuerza de interacción fue en el último término de la integral (6.28), en la cual se tuvo la necesidad de cambiar el coeficiente del vacío del potencial por el número 4 para así evitar divergencias al momento de desarrollar esta integral. Para el desarrollo de la integral (6.28) se uso las soluciones asintóticas $(f(r), v(r))$ del modelo de Nielsen - Olesen, debido a esto el resultado de la fuerza de interacción se dividió en dos casos: para $\beta \lesssim 4$ y para $\beta > 4$. Donde β es un resultado hallado en el capítulo 3 que representa la relación entre las masas del Campo de Higgs (m_H) y del Campo Gauge (m_A). Se determinó que la fuerza de interacción para ambos casos es una fuerza de atracción y sera mas intensa cuando $\beta \lesssim 4$ es decir cuando $m_H \lesssim 2m_A$. De acuerdo, al ansatz de Nielsen - Olesen (6.2) hemos demostrado que presenta un Gauge de Coulomb, lo cual lleva a la existencia de una corriente \vec{J} (6.40), el cual es una corriente que circula alrededor de la ubicación del solitón. La característica de esta corriente que circula alrededor del solitón, nos da la idea que es similar a una espira con corriente, por ello se realizo una analogía con la fuerza de dos espiras en las cuales circulan corrientes en la misma dirección separadas una distancia mayor al radio de cada espira, o en otras palabras la interacción entre dos dipolos magnéticos. Se concluye que es posible realizar cierta semejanza entre la interacción entre dos vórtices y la interacción entre dos dipolos bajo ciertos valores de corriente, siempre en cuando la separación entre estos dipolos sea mucho mayor a las dimensiones de cada una de ellas.

Bibliografía

- [1] M. F. Atiyah. Topological quantum field theory. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 68:175–186, 1988.
- [2] J. D. Bjorken and S. D. Drell. *Relativistic quantum mechanics*, chapter 10. McGraw-Hill, 1965.
- [3] R. Casalbuoni. Advanced quantum field theory. *Dipartimento di Fisica, Lezioni date all Università di Firenze nella*, 2005:219–220, 2004.
- [4] M. Caso Huerta. La ecuación de korteweg-de vries: Un ejemplo práctico de integrabilidad. 2018.
- [5] J. Cuevas-Maraver, N. Boussaïd, A. Comech, R. Lan, P. G. Kevrekidis, and A. Saxena. Solitary waves in the nonlinear dirac equation. In *Nonlinear Systems, Vol. 1*, pages 89–143. Springer, 2018.
- [6] A. Das. *Integrable models*, volume 30. World scientific, 1989.
- [7] G. Derrick. Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles. *Journal of Mathematical Physics*, 5(9):1252–1254, 1964.
- [8] P. A. M. Dirac. The theory of magnetic poles. *Physical Review*, 74(7):817, 1948.
- [9] R. Finkelstein, R. LeLevier, and M. Ruderman. Nonlinear spinor fields. *Physical Review*, 83(2):326–332, 1951.
- [10] M. B. Gallego. Los premios nobel científicos de 2016. *Razón y fe*, 275(1419):75–80, 2017.
- [11] H. Georgi and S. L. Glashow. Unity of all elementary-particle forces. *Physical Review Letters*, 32(8):438, 1974.
- [12] J. Goldstone. Field theories with «superconductor» solutions. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 19(1):154–164, 1961.
- [13] W. Greiner et al. *Relativistic quantum mechanics*, volume 3. Springer, 1990.
- [14] P. W. Higgs. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Physical Review Letters*, 13(16):508, 1964.
- [15] D. Ivanenko. Notes to the theory of interaction via particles. *Zh. Éksp. Teor. Fiz*, 8:260–266, 1938.
- [16] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics*, 1999.

- [17] B. Janssen. Teoría de la relatividad general. *Universidad de Granada*, 22:153–157, 2013.
- [18] L. Landau and E. Lifshitz. *Course of theoretical physics. vol. 1: Mechanics*, chapter 1. Oxford, 1960.
- [19] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Teoría clásica de campos*, volume 2, chapter 4. Reverté, 1992.
- [20] M. C. López. *Covariancia de las ecuaciones de campo y principios variacionales*. PhD thesis, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires, 1989.
- [21] P. Mitra. *Symmetries and symmetry breaking in field theory*, chapter 8. CRC Press, 2014.
- [22] H. B. Nielsen and P. Olesen. Vortex-line models for dual strings. *Nuclear Physics B*, 61:45–61, 1973.
- [23] L. Perivolaropoulos. Asymptotics of nielsen-olesen vortices. *Physical Review D*, 48(12):5961, 1993.
- [24] A. M. Polyakov. Interaction of goldstone particles in two dimensions. applications to ferromagnets and massive yang-mills fields. *Physics Letters B*, 59(1):79–81, 1975.
- [25] A. M. Polyakov. Particle spectrum in quantum field theory. In *30 Years Of The Landau Institute Selected Papers*, pages 540–541. World Scientific, 1996.
- [26] N. Raza, A. R. Butt, and A. Javid. Approximate solution of nonlinear klein-gordon equation using sobolev gradients. *Journal of Function Spaces*, 2016, 2016.
- [27] C. Rebbi and G. Soliani. *Solitons and particles*. World Scientific, 1984.
- [28] C. C. Rodríguez. Matemáticas y matemáticos: vida y obra de emmy noether. In *Matemáticas y matemáticos*, pages 185–210. Universidad de Sevilla, 2004.
- [29] V. Rubakov. *Classical theory of gauge fields*, chapter 5. Princeton University Press, 2009.
- [30] J. S. Russell. Report on waves. report of the fourteenth meeting of the british association for the advancement of science, york, september 1844, 1845.
- [31] Y. P. Rybakov. Particle structure in nonlinear field theory. *Peoples Friendship University Press, Moscow*, 1985 (in Russian).
- [32] A. A. Sokolov, I. Ternov, V. C. Zhukovski, and A. Borisov. *Electrodinámica cuántica*, chapter 1. Mir, 1989.
- [33] M. Soler. Classical, stable, nonlinear spinor field with positive rest energy. *Physical Review D*, 1(10):2766, 1970.
- [34] M. Soler. Classical electrodynamics for a nonlinear spinor field: Perturbative and exact approaches. *Physical Review D*, 8(10):3424, 1973.

- [35] M. Spiegel. *Mecánica Teórica. Ed*, chapter 11. McGraw-Hill, Madrid, 1992.
- [36] M. R. Spiegel, L. Gutierrez Diaz, and A. Gutiérrez Vázquez. *Análisis vectorial y una introducción al análisis tensorial.*, chapter 4. McGraw-Hill, 1998.
- [37] G. t Hooft. Magnetic monopoles in unified theories. *Nucl. Phys. B*, 79(CERN-TH-1876):276–284, 1974.
- [38] J. E. N. Valde and A. G. Thomas. Solitones, una no-linealidad no tan solitaria. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 7(1), 2006.
- [39] M. Wakano. Intensely localized solutions of the classical dirac-maxwell field equations. *Progress of Theoretical Physics*, 35(6):1117–1141, 1966.
- [40] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical review letters*, 15(6):240, 1965.

Capítulo 8

APÉNDICE

8.1. APÉNDICE 1

Encontremos la ecuación:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} = 0,$$

con:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) + \frac{1}{2}(\partial_\alpha \phi - ieA_\alpha \phi)(\partial^\alpha \phi^* + ieA^\alpha \phi^*) - V(|\phi|),$$

para que la resolución sea mas clara hallaremos primero $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu}$ y despues $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)}$

a. Hallando $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} &= \frac{1}{2}[(\partial_\alpha \phi - ieA_\alpha \phi)(\partial^\alpha \phi^* + ieA^\alpha \phi^*)] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial A^\nu} (\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi^* + ieA^\alpha \phi^* \partial_\alpha \phi - ieA_\alpha \phi \partial^\alpha \phi^* + e^2 A_\alpha A^\alpha |\phi|^2) \\ &= \frac{1}{2} \left[ie\phi^* \partial_\alpha \phi \frac{\partial(A^\alpha)}{\partial(A^\nu)} - ie\phi \partial^\alpha \phi^* \frac{\partial(A_\alpha)}{\partial(A^\nu)} + e^2 |\phi|^2 \frac{\partial(A_\alpha A^\alpha)}{\partial(A^\nu)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ ie\phi^* \partial_\alpha \phi \delta_\nu^\alpha - ie\phi \partial_\alpha \phi^* \delta_\nu^\alpha + e^2 |\phi|^2 \left[A^\alpha \frac{\partial(A_\alpha)}{\partial(A^\nu)} + A_\alpha \frac{\partial(A^\alpha)}{\partial(A^\nu)} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} [ie\phi^* \partial_\nu \phi - ie\phi \partial_\nu \phi^* + e^2 |\phi|^2 (2A_\alpha \delta_\nu^\alpha)] \\ &= \frac{1}{2} (ie\phi^* \partial_\nu \phi - ie\phi \partial_\nu \phi^* + 2e^2 |\phi|^2 A_\nu) \\ &= \frac{ie}{2} (\phi^* \partial_\nu \phi - \phi \partial_\nu \phi^* - 2ie|\phi|^2 A_\nu) \\ &= \frac{ie}{2} [(\partial_\nu \phi - ieA_\nu \phi) \phi^* - (\partial_\nu \phi^* + ieA_\nu \phi^*) \phi] \\ &= \frac{ie}{2} [(D_\nu \phi) \phi^* - (D_\nu \phi)^* \phi] \end{aligned}$$

b. Hallando $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} [(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)] \\
&= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} (\partial_\alpha A_\beta \partial^\alpha A^\beta - \partial_\alpha A_\beta \partial^\beta A^\alpha - \partial_\beta A_\alpha \partial^\alpha A^\beta + \partial_\beta A_\alpha \partial^\beta A^\alpha) \\
&= -\frac{1}{4} \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} (\partial_\alpha A_\beta \partial^\alpha A^\beta) - \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} (\partial_\alpha A_\beta \partial^\beta A^\alpha) - \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} (\partial_\beta A_\alpha \partial^\alpha A^\beta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} (\partial_\beta A_\alpha \partial^\beta A^\alpha) \right] \\
&= -\frac{1}{4} \left[\frac{\partial(\partial_\alpha A^\beta)}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} \partial^\alpha A_\beta + \partial^\alpha A_\beta \frac{\partial(\partial_\alpha A^\beta)}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} - \frac{\partial(\partial_\alpha A^\beta)}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} \partial_\beta A^\alpha - \partial_\alpha A^\beta \frac{\partial(\partial_\beta A^\alpha)}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial(\partial_\beta A^\alpha)}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} \partial_\alpha A^\beta - \partial_\beta A^\alpha \frac{\partial(\partial_\alpha A^\beta)}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} + \frac{\partial(\partial_\beta A^\alpha)}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} \partial^\beta A_\alpha + \partial^\beta A_\alpha \frac{\partial(\partial_\beta A^\alpha)}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} \right] \\
&= -\frac{1}{4} (\delta_\alpha^\mu \delta_\nu^\beta \partial^\alpha A_\beta + \partial^\alpha A_\beta \delta_\alpha^\mu \delta_\nu^\beta - \delta_\alpha^\mu \delta_\nu^\beta \partial_\beta A^\alpha - \partial_\alpha A^\beta \delta_\beta^\mu \delta_\nu^\alpha - \delta_\beta^\mu \delta_\nu^\alpha \partial_\alpha A^\beta \\
&\quad - \partial_\beta A^\alpha \delta_\alpha^\mu \delta_\nu^\beta + \delta_\beta^\mu \delta_\nu^\alpha \partial^\beta A_\alpha + \partial^\beta A_\alpha \delta_\beta^\mu \delta_\nu^\alpha) \\
&= -\frac{1}{4} (\partial^\mu A_\nu + \partial^\mu A_\nu - \partial_\nu A^\mu - \partial_\nu A^\mu - \partial_\nu A^\mu - \partial_\nu A^\mu + \partial^\mu A_\nu + \partial^\mu A_\nu) \\
&= (\partial_\nu A^\mu - \partial^\mu A_\nu).
\end{aligned}$$

Entonces la ecuación de campo sera:

$$\begin{aligned}
\frac{ie}{2} [(D_\nu \phi) \phi^* - (D_\nu \phi)^* \phi] - \partial_\mu (\partial_\nu A^\mu - \partial^\mu A_\nu) &= 0 \\
\frac{ie}{2} [(D_\nu \phi) \phi^* - (D_\nu \phi)^* \phi] - \partial^\mu (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) &= 0 \\
\frac{ie}{2} [(D_\nu \phi) \phi^* - (D_\nu \phi)^* \phi] - \partial^\mu F_{\nu\mu} &= 0,
\end{aligned}$$

hagamos el cambio $\mu \rightarrow \nu$ y $\nu \rightarrow \mu$, entonces:

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = \frac{ie}{2} [(D_\mu \phi) \phi^* - (D_\mu \phi)^* \phi]$$

8.2. APÉNDICE 2

Encontremos la ecuación:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0,$$

con:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) + \frac{1}{2} (\partial_\alpha \phi - ie A_\alpha \phi) (\partial^\alpha \phi^* + ie A^\alpha \phi^*) - \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - \eta^2)^2,$$

entonces

$$\begin{aligned}
& -\frac{ie}{2}A_\alpha(\partial^\alpha\phi^* + ieA^\alpha\phi^*) - \frac{\lambda}{2}\phi^*(|\phi|^2 - \eta^2) - \partial_\mu \left[\frac{1}{2}(\partial^\alpha\phi^* + ieA^\alpha\phi^*) \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\phi)} (\partial_\alpha\phi - ieA_\alpha\phi) \right] = 0 \\
& -\frac{ie}{2}A_\alpha(\partial^\alpha\phi^* + ieA^\alpha\phi^*) - \frac{\lambda}{2}\phi^*(|\phi|^2 - \eta^2) - \frac{\partial_\mu}{2} \left[(\partial^\alpha\phi^* + ieA^\alpha\phi^*) \frac{\partial(\partial_\alpha\phi)}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] = 0 \\
& -\frac{ie}{2}A_\alpha(\partial^\alpha\phi^* + ieA^\alpha\phi^*) - \frac{\lambda}{2}\phi^*(|\phi|^2 - \eta^2) - \frac{\partial_\mu}{2} [(\partial^\alpha\phi^* + ieA^\alpha\phi^*)\delta_\alpha^\mu] = 0 \\
& -ieA_\mu(\partial^\mu\phi^* + ieA^\mu\phi^*) - \lambda\phi^*(|\phi|^2 - \eta^2) - \partial_\mu(\partial^\mu\phi^* + ieA^\mu\phi^*) = 0 \\
& -ieA_\mu\partial^\mu\phi^* + e^2A_\mu A^\mu\phi^* - \lambda\phi^*(|\phi|^2 - \eta^2) - \partial_\mu\partial^\mu\phi^* - ie\partial_\mu(A^\mu\phi^*) = 0 \\
& -\lambda\phi^*(|\phi|^2 - \eta^2) = \partial_\mu\partial^\mu\phi^* + ie\partial_\mu(A^\mu\phi^*) + ieA_\mu\partial^\mu\phi^* - e^2A_\mu A^\mu\phi^* \\
& -\lambda\phi^*(|\phi|^2 - \eta^2) = (\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial^\mu\phi^* + ieA^\mu\phi^*) \\
& -\lambda\phi^*(|\phi|^2 - \eta^2) = (\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial^\mu + ieA^\mu)\phi^* \\
& -\lambda\phi^*(|\phi|^2 - \eta^2) = (\partial_\mu + ieA_\mu)^2\phi^* \\
& -\lambda\phi^*(|\phi|^2 - \eta^2) = (D_\mu^*)^2\phi^*
\end{aligned}$$

8.3. APÉNDICE 3

Encontremos la ecuación:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} = 0,$$

con:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) + \frac{1}{2}(\partial^\alpha\phi - ieA^\alpha\phi)(\partial_\alpha\phi^* + ieA_\alpha\phi^*) - \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - \eta^2)^2,$$

entonces

$$\begin{aligned}
& \frac{ie}{2}A_\alpha(\partial^\alpha\phi - ieA^\alpha\phi) - \frac{\lambda}{2}\phi(|\phi|^2 - \eta^2) - \partial_\mu \left[\frac{1}{2}(\partial^\alpha\phi - ieA^\alpha\phi) \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} (\partial_\alpha\phi^* + ieA_\alpha\phi^*) \right] = 0 \\
& \frac{ie}{2}A_\alpha(\partial^\alpha\phi - ieA^\alpha\phi) - \frac{\lambda}{2}\phi(|\phi|^2 - \eta^2) - \frac{\partial_\mu}{2} \left[(\partial^\alpha\phi - ieA^\alpha\phi) \frac{\partial(\partial_\alpha\phi^*)}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} \right] = 0 \\
& \frac{ie}{2}A_\alpha(\partial^\alpha\phi - ieA^\alpha\phi) - \frac{\lambda}{2}\phi(|\phi|^2 - \eta^2) - \frac{\partial_\mu}{2} [(\partial^\alpha\phi - ieA^\alpha\phi)\delta_\alpha^\mu] = 0 \\
& ieA_\mu(\partial^\mu\phi - ieA^\mu\phi) - \lambda\phi(|\phi|^2 - \eta^2) - \partial_\mu(\partial^\mu\phi - ieA^\mu\phi) = 0 \\
& ieA_\mu\partial^\mu\phi + e^2A_\mu A^\mu\phi - \lambda\phi(|\phi|^2 - \eta^2) - \partial_\mu\partial^\mu\phi + ie\partial_\mu(A^\mu\phi) = 0 \\
& -\lambda\phi(|\phi|^2 - \eta^2) = \partial_\mu\partial^\mu\phi - ie\partial_\mu(A^\mu\phi) - ieA_\mu\partial^\mu\phi - e^2A_\mu A^\mu\phi \\
& -\lambda\phi^*(|\phi|^2 - \eta^2) = (\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial^\mu\phi - ieA^\mu\phi) \\
& -\lambda\phi^*(|\phi|^2 - \eta^2) = (\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi \\
& -\lambda\phi^*(|\phi|^2 - \eta^2) = (\partial_\mu - ieA_\mu)^2\phi \\
& -\lambda\phi^*(|\phi|^2 - \eta^2) = (D_\mu)^2\phi
\end{aligned}$$

8.4. APÉNDICE 4

Desarrollo de las integrales para hallar \vec{F}_\perp

$$\vec{F}_\perp = \frac{4\pi\vec{a}_\perp A^2}{m+w} \int_{R/2}^{\infty} \left(\underbrace{\lambda^2 \frac{e^{-2\lambda r}}{r}}_{(I)} - \underbrace{\frac{\lambda^2 R^2 e^{-2\lambda r}}{4 r^3}}_{(II)} + \underbrace{2\lambda \frac{e^{-2\lambda r}}{r^2}}_{(III)} - \underbrace{\frac{\lambda R^2 e^{-2\lambda r}}{2 r^4}}_{(IV)} + \underbrace{\frac{e^{-2\lambda r}}{r^3}}_{(V)} - \underbrace{\frac{R^2 e^{-2\lambda r}}{4 r^5}}_{(VI)} \right) dr$$

desarrollando las integrales tenemos :

$$\begin{aligned} (I) &= \int_{R/2}^{\infty} \lambda^2 \frac{e^{-2\lambda r}}{r} = \lambda \frac{e^{-\lambda R}}{R} - \frac{e^{-\lambda R}}{R^2} + 2 \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda R^3} - 6 \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda^2 R^4} + O\left(\frac{e^{-\lambda R}}{R^5}\right) \\ (II) &= \int_{R/2}^{\infty} \frac{\lambda^2 R^2 e^{-2\lambda r}}{4 r^3} = \lambda \frac{e^{-\lambda R}}{R} - 3 \frac{e^{-\lambda R}}{R^2} + 12 \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda R^3} - 60 \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda^2 R^4} + O\left(\frac{e^{-\lambda R}}{R^5}\right) \\ (III) &= \int_{R/2}^{\infty} 2\lambda \frac{e^{-2\lambda r}}{r^2} = 4 \frac{e^{-\lambda R}}{R^2} - 8 \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda R^3} + 24 \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda^2 R^4} + O\left(\frac{e^{-\lambda R}}{R^5}\right) \\ (IV) &= \int_{R/2}^{\infty} \frac{\lambda R^2 e^{-2\lambda r}}{2 r^4} = 4 \frac{e^{-\lambda R}}{R^2} - 16 \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda R^3} + 80 \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda^2 R^4} + O\left(\frac{e^{-\lambda R}}{R^5}\right) \\ (V) &= \int_{R/2}^{\infty} \frac{e^{-2\lambda r}}{r^3} = 4 \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda R^3} - 12 \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda^2 R^4} + O\left(\frac{e^{-\lambda R}}{R^5}\right) \\ (VI) &= \int_{R/2}^{\infty} \frac{R^2 e^{-2\lambda r}}{4 r^5} = 4 \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda R^3} - 20 \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda^2 R^4} + O\left(\frac{e^{-\lambda R}}{R^5}\right), \end{aligned}$$

donde O es una funcion que depende del termino $\frac{e^{-\lambda R}}{R^5}$, el cual se despreciara ya que R es muy grande.

Por lo tanto al reemplazar (I), (II), (III), (IV), (V) y (VI) en la expresi3n de \vec{F}_\perp , obtenemos la siguiente expresi3n.

$$\vec{F}_\perp = \frac{4\pi\vec{a}_\perp A^2}{m+w} \left(2 \frac{e^{-\lambda R}}{R^2} - 2 \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda R^3} + 6 \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda^2 R^4} \right)$$

8.5. APÉNDICE 5

Desarrollo de la integrales para hallar F_z

$$F_z = \frac{4\pi a_z A^2}{m+w} \int_{R/2}^{\infty} \left(-\underbrace{\lambda \frac{e^{-2\lambda r}}{r^2}}_{(A)} + \underbrace{\frac{\lambda^2 R^2 e^{-2\lambda r}}{2 r^3}}_{(B)} - \underbrace{\frac{e^{-2\lambda r}}{r^3}}_{(C)} + \underbrace{\frac{5\lambda R^2 e^{-2\lambda r}}{4 r^4}}_{(D)} + \underbrace{R^2 \frac{e^{-2\lambda r}}{r^5}}_{(E)} \right)$$

Al momento al desarrollar solo vamos a considerar hasta los t3rminos que tengan $\frac{e^{-\lambda R}}{R^2}$ los dem3s t3rminos se despreciara ya que R es muy grande, teniendo esto en cuenta solo

se considera las siguientes integrales:

$$\begin{aligned}
(A) &= \int_{R/2}^{\infty} \lambda \frac{e^{-2\lambda r}}{r^2} = 2 \frac{e^{-\lambda R}}{R^2} + O\left(\frac{e^{-\lambda R}}{R^3}\right) \\
(B) &= \int_{R/2}^{\infty} \frac{\lambda^2 R^2}{2} \frac{e^{-2\lambda r}}{r^3} = 2\lambda \frac{e^{-\lambda R}}{R} - 6 \frac{e^{-\lambda R}}{R^2} + O\left(\frac{e^{-\lambda R}}{R^3}\right) \\
(D) &= \int_{R/2}^{\infty} \frac{5\lambda R^2}{4} \frac{e^{-2\lambda r}}{r^4} = 10 \frac{e^{-\lambda R}}{R^2} + O\left(\frac{e^{-\lambda R}}{R^3}\right).
\end{aligned}$$

Despreciando la función $O\left(\frac{e^{-\lambda R}}{R^3}\right)$ por lo ya mencionado antes y reemplazando (A), (B) y (D) en la expresión de F_z , obtenemos la siguiente expresión.

$$F_z = \frac{8\pi a_z A^2}{m+w} e^{-\lambda R} \left(\frac{\lambda}{R} + \frac{1}{R^2} \right)$$

8.6. APÉNDICE 6

Por definición:

$$L = \int \mathcal{L} dV.$$

Pero $[L] = 1$, por lo tanto $[\mathcal{L}] = L^{-3}$.

Sea:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} |D^\mu \phi|^2 - \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - \eta^2)^2,$$

entonces

1. $[F_{\mu\nu}] = L^{-3/2}$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu &= F_{\mu\nu} \\
[\partial_\mu A_\nu] &= [F_{\mu\nu}] \\
[\partial_\mu][A_\nu] &= [F_{\mu\nu}] \\
L^{-1}[A_\nu] &= L^{-3/2} \\
[A_\nu] &= L^{-1/2}.
\end{aligned}$$

2. $[D_\mu \phi] = L^{-3/2}$

$$\begin{aligned}
(\partial_\mu \phi - ie A_\mu \phi) &= D_\mu \phi \\
[\partial_\mu \phi] &= [D_\mu \phi] \\
[\partial_\mu][\phi] &= [D_\mu \phi] \\
L^{-1}[\phi] &= L^{-3/2} \\
[\phi] &= L^{-1/2}.
\end{aligned}$$

Ademas

$$\begin{aligned}
[ieA_\mu\phi] &= [D_\mu\phi] \\
[i][e][A_\mu][\phi] &= [D_\mu\phi] \\
1 \cdot [e] \cdot L^{-1/2} \cdot L^{-1/2} &= L^{-3/2} \\
[e] &= L^{-1/2}.
\end{aligned}$$

$$3. \left[\frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - \eta^2)^2\right] = L^{-3}$$

$$\begin{aligned}
[\eta] &= [\phi] \\
[\eta] &= L^{-1/2}.
\end{aligned}$$

Ademas

$$\begin{aligned}
[\lambda][\phi]^4 &= \left[\frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - \eta^2)^2\right] \\
[\lambda]L^{-2} &= L^{-3} \\
[\lambda] &= L^{-1}.
\end{aligned}$$

8.7. APÉNDICE 7

Sea la ecuación de movimiento:

$$-\lambda\phi(|\phi|^2 - \eta^2) = (D_\mu)^2\phi,$$

estamos considerando campos independientes del tiempo por lo tanto la ecuación sera reescrita como

$$-\lambda\phi(|\phi|^2 - \eta^2) = (D_i)^2\phi,$$

desarrollemos esta ecuación

$$\begin{aligned}
-\lambda\phi(|\phi|^2 - \eta^2) &= (\partial_i - ieA_i)(\partial^i\phi - ieA^i\phi) \\
-\lambda\phi(|\phi|^2 - \eta^2) &= \partial_i(\partial^i\phi) - ie\partial_i(A^i\phi) - ieA_i\partial^i\phi - e^2A_iA^i\phi \\
-\lambda\phi(|\phi|^2 - \eta^2) &= -\nabla^2\phi + ie\nabla \cdot (\bar{A}\phi) + ie\bar{A} \cdot \nabla\phi + e^2|\bar{A}|^2\phi.
\end{aligned}$$

Utilizando coordenadas polares, donde:

$$\begin{aligned}
\nabla &= \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad y, \\
\nabla^2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},
\end{aligned}$$

por lo tanto usando el ansatz de Nielsen-Olesen $\phi = \eta f(r)e^{i\theta}$ y $\bar{A} = \frac{v(r)}{er}\hat{e}_\theta$, tendremos:

$$\begin{aligned}
\nabla\phi &= \hat{e}_r \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \frac{\partial\phi}{\partial \theta} \\
&= \hat{e}_r \eta f'(r)e^{i\theta} + \frac{\hat{e}_\theta}{r} i\eta f(r)e^{i\theta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} & \nabla\cdot(\bar{A}\phi) &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\eta f(r)v(r)}{er}e^{i\theta}\right) \\ &= \frac{\eta}{r}(f'(r) + rf''(r))e^{i\theta} - \frac{\eta}{r^2}f(r)e^{i\theta} & &= \frac{i\eta}{er^2}f(r)v(r)e^{i\theta}\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación de movimiento se tendrá:

$$-\lambda\eta f(r)e^{i\theta}(\eta^2 f^2(r) - \eta^2) = -\frac{\eta}{r}(f'(r) + rf''(r))e^{i\theta} + \frac{\eta}{r^2}f(r)e^{i\theta} - \frac{\eta}{r^2}f(r)v(r)e^{i\theta} - \frac{\eta}{r^2}f(r)v(r)e^{i\theta} + \frac{\eta}{r^2}f(r)v^2(r)e^{i\theta},$$

simplificando:

$$\begin{aligned}-\lambda\eta^2 f(r)(f^2(r) - 1) &= -\frac{1}{r}(f'(r) + rf''(r)) + \frac{f(r)}{r^2} - \frac{2}{r^2}f(r)v(r) + \frac{f(r)v^2(r)}{r^2} \\ -\lambda\eta^2 f(r)(f^2(r) - 1) &= -\frac{1}{r^2}(f'(r) + rf''(r)) + \frac{f(r)}{r^2}(1 - 2v(r) + v^2(r)) \\ -\lambda\eta^2 f(r)(f^2(r) - 1) &= -\frac{1}{r^2}(f'(r) + rf''(r)) + \frac{f(r)}{r^2}(1 - v(r))^2,\end{aligned}$$

ordenando:

$$f''(r) + \frac{f'(r)}{r} - \frac{(1 - v^2(r))^2}{r^2}f(r) - \lambda\eta^2(f^2(r) - 1)f(r) = 0,$$

8.8. APÉNDICE 8

Sea la ecuación de movimiento:

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = \frac{ie}{2}[(D_\mu\phi)\phi^* - (D_\mu\phi)^*\phi],$$

consideramos campos independientes del tiempo y con un campo gauge $A_0 = 0$, la anterior ecuación sera reescrita como

$$\partial^j F_{ij} = \frac{ie}{2}[(D_i\phi)\phi^* - (D_i\phi)^*\phi],$$

desarrollemos esta ecuación

$$\begin{aligned}\partial^j(\partial_i A_j - \partial_j A_i) &= \frac{ie}{2}[(\partial_i\phi - ieA_i\phi)\phi^* - (\partial_i\phi^* + ieA_i\phi^*)\phi] \\ \partial^j(\partial_i A_j) - \partial^j(\partial_j A_i) &= \frac{ie}{2}[(\partial_i\phi)\phi^* - (\partial_i\phi^*)\phi - 2ieA_i|\phi|^2] \\ \partial_i(\partial^j A_j) - \partial^j(\partial_j A_i) &= \frac{ie}{2}[(\partial_i\phi)\phi^* - (\partial_i\phi^*)\phi - 2ieA_i|\phi|^2] \\ -\nabla(\nabla\cdot\bar{A}) + \nabla^2\bar{A} &= \frac{ie}{2}[(\nabla\phi)\phi^* - (\nabla\phi^*)\phi - 2ie\bar{A}|\phi|^2].\end{aligned}$$

Usando el ansatz de Nielsen-Olesen $\phi = \eta f(r)e^{i\theta}$ y $\bar{A} = \frac{v(r)}{er}\hat{e}_\theta$, donde:

$$\hat{e}_\theta = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j},$$

utilizando coordenadas polares tendremos que:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \bar{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial \theta^2} \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v(r)}{er} \hat{e}_\theta \right) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{v(r)}{er} \hat{e}_\theta \right) \\
&= \frac{1}{er} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v(r)}{r} \right) \hat{e}_\theta + \frac{v(r)}{r} \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial r} \right\} \right] + \frac{v(r)}{er^3} \frac{\partial^2 \hat{e}_\theta}{\partial \theta^2} \\
&= \frac{1}{er} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v(r)}{r} \right) \hat{e}_\theta \right\} \right] - \frac{v(r)}{er^3} \hat{e}_\theta \\
&= \frac{1}{er} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{v'(r)}{r} - \frac{v(r)}{r^2} \right) \hat{e}_\theta \right] - \frac{v(r)}{er^3} \hat{e}_\theta \\
&= \frac{1}{er} \frac{\partial}{\partial r} \left[v'(r) \hat{e}_\theta - \frac{v(r)}{r} \hat{e}_\theta \right] - \frac{v(r)}{er^3} \hat{e}_\theta \\
&= \frac{1}{er} \left[\frac{\partial v'(r)}{\partial r} \hat{e}_\theta + v'(r) \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v(r)}{r} \right) \hat{e}_\theta - \frac{v(r)}{r} \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial r} \right] - \frac{v(r)}{er^3} \hat{e}_\theta \\
&= \frac{1}{er} \left[v''(r) - \left(\frac{v'(r)}{r} - \frac{v(r)}{r^2} \right) \right] \hat{e}_\theta - \frac{v(r)}{er^3} \hat{e}_\theta \\
&= \frac{1}{er} \left[v''(r) - \frac{v'(r)}{r} + \frac{v(r)}{r^2} \right] \hat{e}_\theta - \frac{v(r)}{er^3} \hat{e}_\theta \\
&= \frac{1}{er} \left(v''(r) - \frac{v'(r)}{r} \right) \hat{e}_\theta.
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
-\nabla(\nabla \cdot \bar{A}) &= \nabla \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v(r)}{er} \right) \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Retornando a la ecuación de movimiento se tendrá

$$\begin{aligned}
\frac{1}{er} \left(v''(r) - \frac{v'(r)}{r} \right) \hat{e}_\theta &= \frac{ie}{2} \left[\left(\hat{e}_r \eta f'(r) e^{i\theta} + \frac{\hat{e}_\theta}{r} i \eta f(r) e^{i\theta} \right) \eta f(r) e^{-i\theta} \right. \\
&\quad \left. - \left(\hat{e}_r \eta f'(r) e^{-i\theta} - \frac{\hat{e}_\theta}{r} i \eta f(r) e^{-i\theta} \right) \eta f(r) e^{i\theta} - 2ie \frac{v(r)}{er} \eta^2 f^2(r) \hat{e}_\theta \right] \\
\frac{1}{er} \left(v''(r) - \frac{v'(r)}{r} \right) \hat{e}_\theta &= \frac{ie}{2} \left(\frac{2i\eta^2}{r} f^2(r) - \frac{2i\eta^2}{r} f^2(r) v(r) \right) \hat{e}_\theta
\end{aligned}$$

simplificando y factorizando

$$\begin{aligned}
v''(r) - \frac{v'(r)}{r} &= \eta^2 e^2 f^2(r) (v(r) - 1) \\
v''(r) - \frac{v'(r)}{r} + \eta^2 e^2 f^2(r) (1 - v(r)) &= 0
\end{aligned}$$

8.9. APÉNDICE 9

Reemplacemos el ansatz $f \rightarrow 1 + \delta f$ y $v \rightarrow 1 + \delta v$ en la ecuación

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \frac{(1 - v(r))^2}{r^2} f(r) - \beta(f^2(r) - 1)f(r) = 0,$$

entonces:

$$(1 + \delta f)'' + \frac{1}{r}(1 + \delta f)' - \frac{(1 - 1 - \delta v)^2}{r^2}(1 + \delta f) - \beta((1 + \delta f)^2 - 1)(1 + \delta f) = 0$$

$$\delta f'' + \frac{\delta f'}{r} - \frac{(\delta v)^2}{r^2}(1 + \delta f) - \beta(2\delta f + (\delta f)^2)(1 + \delta f) = 0,$$

despreciemos los términos de δf de orden mayor a uno

$$\delta f'' + \frac{\delta f'}{r} - \frac{(\delta v)^2}{r^2} - \frac{(\delta v)^2 \delta f}{r^2} - 2\beta \delta f(1 + \delta f) = 0$$

$$\delta f'' + \frac{\delta f'}{r} - \frac{(\delta v)^2}{r^2} - 2\beta \delta f = 0$$

$$\delta f'' + \frac{\delta f'}{r} - \frac{(\delta v)^2}{r^2} - 2\beta \delta f = 0$$

8.10. APÉNDICE 10

Reemplacemos el ansatz $f \rightarrow 1 + \delta f$ y $v \rightarrow 1 + \delta v$ en la ecuación

$$v''(r) - \frac{1}{r}v'(r) + 2(1 - v(r))f^2(r) = 0,$$

entonces

$$(1 + \delta v)'' - \frac{1}{r}(1 + \delta v)' + 2(1 - 1 - \delta v)(1 + \delta f)^2 = 0$$

$$\delta v'' - \frac{\delta v'}{r} - 2\delta v(1 + 2\delta f) = 0$$

$$\delta v'' - \frac{\delta v'}{r} - 2\delta v - 4\delta v \delta f = 0$$

$$\delta v'' - \frac{\delta v'}{r} - 2\delta v = 0$$

8.11. APÉNDICE 11

Reemplacemos el ansatz

$$\delta v = e^{-\xi r} r^\alpha (c_1 + r^{-1} c_2)$$

en la ecuación

$$\delta v'' - \frac{\delta v'}{r} - 2\delta v = 0,$$

por lo tanto del ansatz se tendrá que:

$$\delta v' = -\xi e^{-\xi r} (c_1 r^\alpha + c_2 r^{\alpha-1}) + e^{-\xi r} [\alpha c_1 r^{\alpha-1} + (\alpha - 1) c_2 r^{\alpha-2}]$$

y

$$\begin{aligned} \delta v'' &= \xi^2 e^{-\xi r} (c_1 r^\alpha + c_2 r^{\alpha-1}) - \xi e^{-\xi r} [\alpha c_1 r^{\alpha-1} + (\alpha - 1) c_2 r^{\alpha-2}] - \\ &\quad \xi e^{-\xi r} [\alpha c_1 r^{\alpha-1} + (\alpha - 1) c_2 r^{\alpha-2}] + e^{-\xi r} [\alpha(\alpha - 1) c_1 r^{\alpha-2} + (\alpha - 1)(\alpha - 2) c_2 r^{\alpha-3}] \\ &= \xi^2 e^{-\xi r} (c_1 r^\alpha + c_2 r^{\alpha-1}) - 2\xi e^{-\xi r} [\alpha c_1 r^{\alpha-1} + (\alpha - 1) c_2 r^{\alpha-2}] + \\ &\quad e^{-\xi r} [\alpha(\alpha - 1) c_1 r^{\alpha-2} + (\alpha - 1)(\alpha - 2) c_2 r^{\alpha-3}]. \end{aligned}$$

Reemplazando $\delta v'$ y $\delta v''$ en la ecuación diferencial:

$$0 = \xi^2 e^{-\xi r} (c_1 r^\alpha + c_2 r^{\alpha-1}) - 2\xi e^{-\xi r} [\alpha c_1 r^{\alpha-1} + (\alpha-1)c_2 r^{\alpha-2}] + \\ e^{-\xi r} [\alpha(\alpha-1)c_1 r^{\alpha-2} + (\alpha-1)(\alpha-2)c_2 r^{\alpha-3}] + \xi e^{-\xi r} (c_1 r^{\alpha-1} + c_2 r^{\alpha-2}) - \\ e^{-\xi r} [\alpha c_1 r^{\alpha-2} + (\alpha-1)c_2 r^{\alpha-3}] - 2e^{-\xi r} (c_1 r^\alpha + c_2 r^{\alpha-1})$$

agrupando y ordenando:

$$0 = (\xi^2 c_1 - 2c_1) e^{-\xi r} r^\alpha + (\xi^2 c_2 - 2\xi \alpha c_1 + \xi c_1 - 2c_2) e^{-\xi r} r^{\alpha-1} + \\ [-2\xi(\alpha-1)c_2 + \alpha(\alpha-1)c_1 + \xi c_2 - \alpha c_1] e^{-\xi r} r^{\alpha-2} + [(\alpha-1)(\alpha-2)c_2 - (\alpha-1)c_2] e^{-\xi r} r^{\alpha-3}$$

igualando a cero los coeficientes de $e^{-\xi r} r^\alpha$ y $e^{-\xi r} r^{\alpha-1}$

$$\xi^2 c_1 - 2c_1 = 0 \\ \xi = \sqrt{2}$$

$$\xi^2 c_2 - 2\xi \alpha c_1 + \xi c_1 - 2c_2 = 0, \quad \text{pero } \xi^2 = 2 \\ -2\xi \alpha c_1 + \xi c_1 = 0 \\ -2\alpha + 1 = 0 \\ \alpha = \frac{1}{2}.$$

Pero como estamos considerando una solución cuando $r \gg 1$, entonces podemos despreciar los términos que contengan a r con un orden negativo, por ello δv se aproximara a:

$$\delta v \rightarrow c_1 e^{-\sqrt{2}r} r^{1/2}$$

8.12. APÉNDICE 12

Resolvemos la ecuación:

$$\delta f'' + \frac{\delta f'}{r} - 2\beta \delta f = \frac{(\delta v)^2}{r^2}$$

reemplacemos la solución δv , entonces:

$$\delta f'' + \frac{\delta f'}{r} - 2\beta \delta f = c_v^2 \frac{e^{-2\sqrt{2}r}}{r},$$

de modo que debemos hallar la solución homogénea y particular de la ecuación.

* Hallemos la solución homogénea:

$$\delta f'' + \frac{\delta f'}{r} - 2\beta \delta f = 0$$

para ello usaremos el ansatz

$$\delta f = e^{-\gamma r} r^\omega (c_3 + r^{-1} c_4),$$

entonces tendremos

$$\delta f' = -\gamma e^{-\gamma r}(c_3 r^\omega + c_4 r^{\omega-1}) + e^{-\gamma r}[\omega c_3 r^{\omega-1} + (\omega - 1)c_4 r^{\omega-2}]$$

y

$$\delta f'' = \gamma^2 e^{-\gamma r}(c_3 r^\omega + c_4 r^{\omega-1}) - 2\gamma e^{-\gamma r}[\omega c_3 r^{\omega-1} + (\omega - 1)c_4 r^{\omega-2}] + e^{-\gamma r}[\omega(\omega - 1)c_3 r^{\omega-2} + (\omega - 1)(\omega - 2)c_4 r^{\omega-3}].$$

Reemplacemos $\delta f'$ y $\delta f''$ en la ecuación diferencial homogénea:

$$0 = \gamma^2 e^{-\gamma r}(c_3 r^\omega + c_4 r^{\omega-1}) - 2\gamma e^{-\gamma r}[\omega c_3 r^{\omega-1} + (\omega - 1)c_4 r^{\omega-2}] + e^{-\gamma r}[\omega(\omega - 1)c_3 r^{\omega-2} + (\omega - 1)(\omega - 2)c_4 r^{\omega-3}] - \gamma e^{-\gamma r}(c_3 r^{\omega-1} + c_4 r^{\omega-2}) + e^{-\gamma r}[\omega c_3 r^{\omega-2} + (\omega - 1)c_4 r^{\omega-3}] - 2\beta e^{-\gamma r}(c_3 r^\omega + c_4 r^{\omega-1})$$

agrupando y ordenando:

$$0 = (\gamma^2 c_3 - 2\beta c_3) e^{-\gamma r} r^\omega + (\gamma^2 c_4 - 2\gamma \omega c_3 - \gamma c_3 - 2\beta c_4) e^{-\gamma r} r^{\omega-1} + [-2\gamma(\omega - 1)c_4 + \omega(\omega - 1)c_3 - \gamma c_4 - \omega c_3] e^{-\gamma r} r^{\omega-2} + [(\omega - 1)(\omega - 2)c_4 + (\omega - 1)c_3] e^{-\gamma r} r^{\omega-3}$$

igualando los coeficientes de $e^{-\gamma r} r^\omega$ y $e^{-\gamma r} r^{\omega-1}$ a cero se tendrá:

$$\begin{aligned} \gamma^2 c_3 - 2\beta c_3 &= 0 \\ \gamma &= \sqrt{2\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma^2 c_4 - 2\gamma \omega c_3 - \gamma c_3 - 2\beta c_4 &= 0, \quad \text{pero } \gamma = 2\beta \\ -2\gamma \omega c_3 - \gamma c_3 &= 0 \\ 2\omega + 1 &= 0 \\ \omega &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pero como estamos considerando una solución cuando $r \gg 1$, entonces podemos despreciar los términos que contengan a r con un orden negativo, por ello si $c_3 = c_f$ entonces δf se aproximara a:

$$\delta f_h \rightarrow c_f \frac{e^{-\sqrt{2\beta}r}}{\sqrt{r}}$$

* Hallemos la solución particular, sea la solución particular:

$$\delta f = \frac{c_v^2}{k} \frac{e^{-2\sqrt{2}r}}{r^m},$$

encontremos las constantes k y m , de la solución particular tenemos que

$$\delta f' = \frac{c_v^2}{k} (-2\sqrt{2}e^{-2\sqrt{2}r} r^{-m} - m e^{-2\sqrt{2}r} r^{-m-1})$$

y

$$\begin{aligned}\delta f'' &= \frac{c_v^2}{k} [8e^{-2\sqrt{2}r} r^{-m} + 2\sqrt{2}me^{-2\sqrt{2}r} r^{-m-1} + 2\sqrt{2}me^{-2\sqrt{2}r} r^{-m-1} + \\ &\quad m(m+1)e^{-2\sqrt{2}r} r^{-m-2}] \\ &= \frac{c_v^2}{k} [8e^{-2\sqrt{2}r} r^{-m} + 4\sqrt{2}me^{-2\sqrt{2}r} r^{-m-1} + m(m+1)e^{-2\sqrt{2}r} r^{-m-2}].\end{aligned}$$

Reemplacemos $\delta f'$ y $\delta f''$ en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}\frac{c_v^2 e^{-2\sqrt{2}r}}{r} &= \frac{c_v^2}{k} [8e^{-2\sqrt{2}r} r^{-m} + 4\sqrt{2}me^{-2\sqrt{2}r} r^{-m-1} + m(m+1)e^{-2\sqrt{2}r} r^{-m-2}] + \\ &\quad \frac{c_v^2}{k} (-2\sqrt{2}e^{-2\sqrt{2}r} r^{-m-1} - me^{-2\sqrt{2}r} r^{-m-2}) - 2\beta \frac{c_v^2 e^{-2\sqrt{2}r}}{k r^m}\end{aligned}$$

factorizando y ordenando:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{kr^m} \left(8 - 2\beta + \underbrace{\frac{4\sqrt{2}m - 2\sqrt{2}}{r}}_{\approx 0} + \underbrace{\frac{m(m+1) - m}{r^2}}_{\approx 0} \right)$$

Pero como debemos encontrar una solución cuando $r \gg 1$, entonces el tercer y cuarto termino de la parte derecha de la ecuación podemos despreciarlo, en consecuencia se tendrá:

$$\frac{1}{r} = \frac{8 - 2\beta}{kr^m},$$

por lo tanto

$$m = 1 \quad \text{y} \quad k = -2(\beta - 4).$$

Entonces la solución particular sera aproximadamente igual a

$$\delta f_p \rightarrow -\frac{c_v^2}{2(\beta - 4)} \frac{e^{-2\sqrt{2}r}}{r}$$

De modo que la solución de δf sera igual a

$$\delta f = \delta f_h + \delta f_p \equiv c_f \frac{e^{-\sqrt{2}\beta r}}{\sqrt{r}} - \frac{c_v^2}{2(\beta - 4)} \frac{e^{-2\sqrt{2}r}}{r}$$

8.13. APÉNDICE 13

Desarrollando la integral

$$\int \frac{e^{-\alpha r}}{r^\beta} dr$$

usando integración por partes se tendrá:

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{-\alpha r}}{r^\beta} dr &= -\frac{1}{\alpha} \frac{e^{-\alpha r}}{r^\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \int \frac{e^{-\alpha r}}{r^{\beta+1}} \\
&= -\frac{1}{\alpha} \frac{e^{-\alpha r}}{r^\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \left(-\frac{1}{\alpha} \frac{e^{-\alpha r}}{r^{\beta+1}} - \frac{(\beta+1)}{\alpha} \int \frac{e^{-\alpha r}}{r^{\beta+2}} dr \right) \\
&= -\frac{1}{\alpha} \frac{e^{-\alpha r}}{r^\beta} + \frac{\beta}{\alpha^2} \frac{e^{-\alpha r}}{r^{\beta+1}} + \frac{\beta(\beta+1)}{\alpha^2} \int \frac{e^{-\alpha r}}{r^{\beta+2}} dr \\
&= -\frac{1}{\alpha} \frac{e^{-\alpha r}}{r^\beta} + \frac{\beta}{\alpha^2} \frac{e^{-\alpha r}}{r^{\beta+1}} + \frac{\beta(\beta+1)}{\alpha^2} \left(-\frac{1}{\alpha} \frac{e^{-\alpha r}}{r^{\beta+2}} - \frac{(\beta+2)}{\alpha} \int \frac{e^{-\alpha r}}{r^{\beta+3}} dr \right) \\
&= -\frac{1}{\alpha} \frac{e^{-\alpha r}}{r^\beta} + \frac{\beta}{\alpha^2} \frac{e^{-\alpha r}}{r^{\beta+1}} - \frac{\beta(\beta+1)}{\alpha^3} \frac{e^{-\alpha r}}{r^{\beta+2}} - \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\alpha^3} \int \frac{e^{-\alpha r}}{r^{\beta+3}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{d^n}{dk^n} \left(\frac{1}{k^\beta} \right) \Big|_{k=1} \frac{e^{-\alpha r}}{\alpha^{n+1} r^{\beta+n}}
\end{aligned}$$

8.14. APÉNDICE 14

i. Desarrollo de la integral $I = \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{v'(r)}{er} \right)^2 r dr$:

Reemplazando la función $v(r) = 1 + c_v e^{-\sqrt{2}r} r^{1/2}$, entonces:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{c_v^2}{2e^2} \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \frac{\left(-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}r} r^{1/2} + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{2}r} r^{-1/2} \right)^2}{r} dr \\
&= \frac{c_v^2}{2e^2} \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \frac{2e^{-2\sqrt{2}r} r - \sqrt{2}e^{-2\sqrt{2}r} + \frac{1}{4}e^{-2\sqrt{2}r} r^{-1}}{r} dr \\
&= \frac{c_v^2}{2e^2} \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \left(\underbrace{2e^{-2\sqrt{2}r}}_A - \underbrace{\sqrt{2} \frac{e^{-2\sqrt{2}r}}{r}}_B + \underbrace{\frac{1}{4} \frac{e^{-2\sqrt{2}r}}{r^2}}_{\approx 0} \right) dr,
\end{aligned}$$

como se esta considerando que $r \gg 1$ por lo tanto el ultimo termino de la integral sea aproxima a cero, entonces sean las integrales:

$$A = 2 \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} e^{-2\sqrt{2}r} dr = 2 \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-2\sqrt{2}r} \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\sqrt{2}R},$$

$$\begin{aligned}
B &= \sqrt{2} \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \frac{e^{-2\sqrt{2}r}}{r} dr = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{e^{-2\sqrt{2}r}}{r} + \underbrace{\frac{1}{(2\sqrt{2})^2} \frac{e^{-2\sqrt{2}r}}{r^2} + \dots}_{\approx 0} \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} \\
&= \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{e^{-2\sqrt{2}r}}{r} \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} = \frac{e^{-\sqrt{2}R}}{R}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$I = \frac{c_v^2}{2e^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\sqrt{2}R} - \frac{e^{-\sqrt{2}R}}{R} \right)$$

ii. Desarrollo de la integral $\Pi = \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} 2\eta^2 \left(f'^2(r) + \frac{f^2(r)}{r^2} \right) r dr$:

Reemplazando la función $f(r) = 1 + c_f \frac{e^{-\sqrt{2}\beta r}}{\sqrt{r}}$ para $\beta \lesssim 4$, entonces:

$$\begin{aligned} f'(r) &= c_f \left(-\sqrt{2\beta} e^{-\sqrt{2}\beta r} r^{-1/2} - \frac{1}{2} e^{-\sqrt{2}\beta r} r^{-3/2} \right); \\ f'^2(r) &= c_f^2 \left(2\beta e^{-2\sqrt{2}\beta r} r^{-1} + \sqrt{2\beta} e^{-2\sqrt{2}\beta r} r^{-2} + \frac{1}{4} e^{-2\sqrt{2}\beta r} r^{-3} \right) \quad y \\ f^2(r) &= 1 + 2c_f e^{-\sqrt{2}\beta r} r^{-1/2} + c_f^2 e^{-2\sqrt{2}\beta r} r^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la integral Π sera expresada como

$$\begin{aligned} \Pi &= 2\eta^2 \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \left(2c_f^2\beta \frac{e^{-2\sqrt{2}\beta r}}{r} + c_f^2\sqrt{2\beta} \frac{e^{-2\sqrt{2}\beta r}}{r^2} + \frac{c_f^2}{4} \frac{e^{-2\sqrt{2}\beta r}}{r^3} + \frac{1}{r^2} + 2c_f \frac{e^{-\sqrt{2}\beta r}}{r^{5/2}} + \right. \\ &\quad \left. c_f^2 \frac{e^{-2\sqrt{2}\beta r}}{r^3} \right) r dr \\ &= 2\eta^2 \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \left(2c_f^2\beta e^{-2\sqrt{2}\beta r} + c_f^2\sqrt{2\beta} \frac{e^{-2\sqrt{2}\beta r}}{r} + \underbrace{\frac{c_f^2}{4} \frac{e^{-2\sqrt{2}\beta r}}{r^2}}_{\approx 0} + \frac{1}{r} + \underbrace{2c_f \frac{e^{-\sqrt{2}\beta r}}{r^{3/2}}}_{\approx 0} + \right. \\ &\quad \left. \underbrace{c_f^2 \frac{e^{-2\sqrt{2}\beta r}}{r^2}}_{\approx 0} \right) dr \\ &= 2\eta^2 \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{r}}_A + \underbrace{2c_f^2\beta e^{-2\sqrt{2}\beta r}}_B + \underbrace{c_f^2\sqrt{2\beta} \frac{e^{-2\sqrt{2}\beta r}}{r}}_C \right) dr, \end{aligned}$$

desarrollando la integral A, B y C se obtiene que:

$$A = \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \frac{dr}{r} = \ln(r) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty};$$

$$B = 2c_f^2\beta \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} e^{-2\sqrt{2}\beta r} dr = 2c_f^2\beta \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}\beta} e^{-2\sqrt{2}\beta r} \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} = \frac{c_f^2\sqrt{2\beta}}{2} e^{-\sqrt{2}\beta R} \quad y$$

$$\begin{aligned} C &= c_f^2\sqrt{2\beta} \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \frac{e^{-2\sqrt{2}\beta r}}{r} dr = c_f^2\sqrt{2\beta} \left[-\frac{1}{2\sqrt{2}\beta} \frac{e^{-2\sqrt{2}\beta r}}{r} + \underbrace{\frac{1}{(2\sqrt{2}\beta)^2} \frac{e^{-2\sqrt{2}\beta r}}{r^2} + \dots}_{\approx 0} \right] \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} \\ &= c_f^2\sqrt{2\beta} \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}\beta} \frac{e^{-2\sqrt{2}\beta r}}{r} \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} = c_f^2 \frac{e^{-\sqrt{2}\beta R}}{R} \end{aligned}$$

Entonces

$$\text{II} = 2\eta^2 \left(\ln(r) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} + \frac{c_f^2 \sqrt{2\beta}}{2} e^{-\sqrt{2\beta}R} + c_f^2 \frac{e^{-\sqrt{2\beta}R}}{R} \right)$$

iii. Desarrollando la integral $\text{III} = \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} 2\eta^2 \frac{f^2(r)}{r^2} (v^2(r) - 2v(r)) r dr$:

Reemplazando las función $f(r) = 1 + c_f \frac{e^{-\sqrt{2\beta}r}}{\sqrt{r}}$ para $\beta \lesssim 4$ y $v(r) = 1 + c_v e^{-\sqrt{2}r} r^{1/2}$, entonces:

$$\begin{aligned} \text{III} &= 2\eta^2 \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \left(\frac{1}{r} + 2c_f \frac{e^{-\sqrt{2\beta}r}}{r^{3/2}} + c_f^2 \frac{e^{-2\sqrt{2\beta}r}}{r^2} \right) \left(1 + 2c_v e^{-\sqrt{2}r} r^{1/2} + c_v^2 e^{-2\sqrt{2}r} r - \right. \\ &\quad \left. 2 - 2c_v e^{-\sqrt{2}r} r^{1/2} \right) dr \\ &= 2\eta^2 \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \left(\frac{1}{r} + 2c_f \frac{e^{-\sqrt{2\beta}r}}{r^{3/2}} + c_f^2 \frac{e^{-2\sqrt{2\beta}r}}{r^2} \right) \left(-1 + c_v^2 e^{-2\sqrt{2}r} r \right) dr \\ &= 2\eta^2 \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \left(-\frac{1}{r} + c_v^2 e^{-2\sqrt{2}r} - \underbrace{2c_f \frac{e^{-\sqrt{2\beta}r}}{r^{3/2}}}_{\approx 0} + 2c_f c_v^2 \frac{e^{-(\sqrt{2\beta}+2\sqrt{2})r}}{r^{1/2}} - \underbrace{c_f^2 \frac{e^{-2\sqrt{2\beta}r}}{r^2}}_{\approx 0} + \right. \\ &\quad \left. c_f^2 c_v^2 \frac{e^{-(2\sqrt{2\beta}+2\sqrt{2})r}}{r} \right) dr \\ &= 2\eta^2 \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \left(\underbrace{-\frac{1}{r}}_A + \underbrace{c_v^2 e^{-2\sqrt{2}r}}_B + \underbrace{2c_f c_v^2 \frac{e^{-(\sqrt{2\beta}+2\sqrt{2})r}}{r^{1/2}}}_C + \underbrace{c_f^2 c_v^2 \frac{e^{-(2\sqrt{2\beta}+2\sqrt{2})r}}{r}}_D \right) dr, \end{aligned}$$

desarrollando las integrales A, B, C y D , se tendrá que:

$$A = - \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \frac{dr}{r} = -\ln(r) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty};$$

$$B = c_v^2 \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} e^{-2\sqrt{2}r} dr = c_v^2 \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-2\sqrt{2}r} \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} = \frac{c_v^2 \sqrt{2}}{4} e^{-\sqrt{2}R};$$

$$\begin{aligned} C &= 2c_f c_v^2 \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \frac{e^{-(\sqrt{2\beta}+2\sqrt{2})r}}{r^{1/2}} dr = 2c_f c_v^2 \left[\frac{-1}{(\sqrt{2\beta} + 2\sqrt{2})} \frac{e^{-(\sqrt{2\beta}+2\sqrt{2})r}}{r^{1/2}} + \right. \\ &\quad \left. \underbrace{\frac{1}{2(\sqrt{2\beta} + 2\sqrt{2})^2} \frac{e^{-(\sqrt{2\beta}+2\sqrt{2})r}}{r^{3/2}} + \dots}_{\approx 0} \right] \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} \\ &= 2c_f c_v^2 \left(\frac{-1}{(\sqrt{2\beta} + 2\sqrt{2})} \frac{e^{-(\sqrt{2\beta}+2\sqrt{2})R/2}}{r^{1/2}} \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} = \frac{2c_f c_v^2}{(\sqrt{\beta} + 2)} \frac{e^{-(\sqrt{2\beta}+2\sqrt{2})R/2}}{R^{1/2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= c_f^2 c_v^2 \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \frac{e^{-(2\sqrt{2\beta}+2\sqrt{2})r}}{r} dr = c_f^2 c_v^2 \left[\frac{-1}{2\sqrt{2}(\sqrt{\beta}+1)} \frac{e^{-(2\sqrt{2\beta}+2\sqrt{2})r}}{r} + \right. \\
&\quad \left. \underbrace{\frac{1}{8(\sqrt{\beta}+1)^2} \frac{e^{-(2\sqrt{2\beta}+2\sqrt{2})r}}{r^2} + \dots}_{\approx 0} \right] \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} \\
&= c_f^2 c_v^2 \left[\frac{-1}{2\sqrt{2}(\sqrt{\beta}+1)} \frac{e^{-(2\sqrt{2\beta}+2\sqrt{2})r}}{r} \right] \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} = \frac{c_f^2 c_v^2 \sqrt{2}}{2(\sqrt{\beta}+1)} \frac{e^{-(\sqrt{2\beta}+\sqrt{2})R}}{R}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\text{III} &= 2\eta^2 \left(-\ln(r) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} + \frac{c_v^2 \sqrt{2}}{4} e^{-\sqrt{2}R} + \frac{2c_f c_v^2}{(\sqrt{\beta}+2)} \frac{e^{-(\sqrt{2\beta}+2\sqrt{2})R/2}}{R^{1/2}} + \right. \\
&\quad \left. \frac{c_f^2 c_v^2 \sqrt{2}}{2(\sqrt{\beta}+1)} \frac{e^{-(\sqrt{2\beta}+\sqrt{2})R}}{R} \right)
\end{aligned}$$

iv. Desarrollando la integral $\text{IV} = \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} 4\eta^4 \lambda (f^2(r) - 1)^2 r dr$:

Reemplazando las función $f(r) = 1 + c_f \frac{e^{-\sqrt{2\beta}r}}{\sqrt{r}}$ para $\beta \lesssim 4$, entonces:

$$\begin{aligned}
\text{IV} &= 4\eta^4 \lambda \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \left(2c_f \frac{e^{-\sqrt{2\beta}r}}{r^{1/2}} + c_f^2 \frac{e^{-2\sqrt{2\beta}r}}{r} \right)^2 r dr \\
&= 4\eta^4 \lambda \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \left(4c_f^2 \frac{e^{-2\sqrt{2\beta}r}}{r} + 4c_f^3 \frac{e^{-3\sqrt{2\beta}r}}{r^{3/2}} + c_f^4 \frac{e^{-4\sqrt{2\beta}r}}{r^2} \right) r dr \\
&= 4\eta^4 \lambda \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \left(\underbrace{4c_f^2 e^{-2\sqrt{2\beta}r}}_A + \underbrace{4c_f^3 \frac{e^{-3\sqrt{2\beta}r}}{r^{1/2}}}_B + \underbrace{c_f^4 \frac{e^{-4\sqrt{2\beta}r}}{r}}_C \right) dr,
\end{aligned}$$

desarrollando las integrales A , B y C , se obtendrá que:

$$A = 4c_f^2 \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} e^{-2\sqrt{2}\beta r} dr = 4c_f^2 \left(\frac{-1}{2\sqrt{2}\beta} e^{-2\sqrt{2}\beta r} \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} = \frac{c_f^2 \sqrt{2}\beta}{\beta} e^{-\sqrt{2}\beta R}$$

$$B = 4c_f^3 \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \frac{e^{-3\sqrt{2}\beta r}}{r^{1/2}} dr = 4c_f^3 \left[\frac{-1}{3\sqrt{2}\beta} \frac{e^{-3\sqrt{2}\beta r}}{r^{1/2}} + \underbrace{\frac{1}{2(3\sqrt{2}\beta)^2} \frac{e^{-3\sqrt{2}\beta r}}{r^{3/2}} + \dots}_{\approx 0} \right] \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty}$$

$$= 4c_f^3 \left(\frac{-1}{3\sqrt{2}\beta} \frac{e^{-3\sqrt{2}\beta r}}{r^{1/2}} \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} = \frac{4c_f^3 \sqrt{\beta}}{3\beta} \frac{e^{-3\sqrt{2}\beta R/2}}{R^{1/2}}$$

$$C = c_f^4 \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \frac{e^{-4\sqrt{2}\beta r}}{r} dr = c_f^4 \left[\frac{-1}{4\sqrt{2}\beta} \frac{e^{-4\sqrt{2}\beta r}}{r} + \underbrace{\frac{1}{(4\sqrt{2}\beta)^2} \frac{e^{-4\sqrt{2}\beta r}}{r^2} + \dots}_{\approx 0} \right] \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty}$$

$$= c_f^4 \left(\frac{-1}{4\sqrt{2}\beta} \frac{e^{-4\sqrt{2}\beta r}}{r} \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} = \frac{c_f^4 \sqrt{2}\beta}{4\beta} \frac{e^{-2\sqrt{2}\beta R}}{R}.$$

Entonces

$$IV = 4\eta^4 \lambda \left(\frac{c_f^2 \sqrt{2}\beta}{\beta} e^{-\sqrt{2}\beta R} + \frac{4c_f^3 \sqrt{\beta}}{3\beta} \frac{e^{-3\sqrt{2}\beta R/2}}{R^{1/2}} + \frac{c_f^4 \sqrt{2}\beta}{4\beta} \frac{e^{-2\sqrt{2}\beta R}}{R} \right)$$

8.15. APÉNDICE 15

i. El desarrollo de la integral $I = \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{v'(r)}{er} \right)^2 r dr$ fue resuelto en el **Apéndice 13** ya que solo presenta la función $v(r)$.

ii. Desarrollo de la integral $II = \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} 2\eta^2 \left(f'^2(r) + \frac{f^2(r)}{r^2} \right) r dr$:

Reemplazando la función $f(r) = 1 - \frac{c_v^2}{2(\beta - 4)} \frac{e^{-2\sqrt{2}r}}{r}$ para $\beta > 4$, entonces:

$$f'(r) = \frac{c_v^2}{2(\beta - 4)} (2\sqrt{2}e^{-2\sqrt{2}r} r^{-1} + e^{-2\sqrt{2}r} r^{-2})$$

$$f'^2(r) = \frac{c_v^4}{4(\beta - 4)^2} (8e^{-4\sqrt{2}r} r^{-2} + 4\sqrt{2}e^{-4\sqrt{2}r} r^{-3} + e^{-4\sqrt{2}r} r^{-4})$$

$$f^2(r) = 1 - \frac{c_v^2}{(\beta - 4)} \frac{e^{-2\sqrt{2}r}}{r} + \frac{c_v^4}{4(\beta - 4)^2} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r^2}.$$

Por lo tanto la integral II sera expresada como

$$\begin{aligned}
\Pi &= 2\eta^2 \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \left(\frac{2c_v^4}{(\beta-4)^2} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r^2} + \frac{\sqrt{2}c_v^4}{(\beta-4)^2} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r^3} + \frac{c_v^4}{4(\beta-4)^2} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r^4} + \frac{1}{r^2} - \right. \\
&\quad \left. \frac{c_v^2}{(\beta-4)} \frac{e^{-2\sqrt{2}r}}{r^3} + \frac{c_v^4}{4(\beta-4)^2} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r^4} \right) r dr \\
&= 2\eta^2 \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \left(\frac{2c_v^4}{(\beta-4)^2} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r} + \underbrace{\frac{\sqrt{2}c_v^4}{(\beta-4)^2} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r^2}}_{\approx 0} + \underbrace{\frac{c_v^4}{4(\beta-4)^2} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r^3}}_{\approx 0} + \frac{1}{r} - \right. \\
&\quad \left. \underbrace{\frac{c_v^2}{(\beta-4)} \frac{e^{-2\sqrt{2}r}}{r^2}}_{\approx 0} + \underbrace{\frac{c_v^4}{4(\beta-4)^2} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r^3}}_{\approx 0} \right) dr \\
&= 2\eta^2 \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{r}}_A + \underbrace{\frac{2c_v^4}{(\beta-4)^2} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r}}_B \right) dr,
\end{aligned}$$

desarrollando las integrales A y B, se tendrá que:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \frac{1}{r} dr = \ln(r) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty}; \\
B &= \frac{2c_v^4}{(\beta-4)^2} \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r} dr = \frac{2c_v^4}{(\beta-4)^2} \left[\frac{-1}{4\sqrt{2}} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r} + \underbrace{\frac{1}{(4\sqrt{2})^2} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r^2} + \dots}_{\approx 0} \right] \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} \\
&= \frac{2c_v^4}{(\beta-4)^2} \left(\frac{-1}{4\sqrt{2}} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r} \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} = \frac{c_v^4 \sqrt{2}}{(\beta-4)^2} \frac{e^{-2\sqrt{2}R}}{R}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\Pi = 2\eta^2 \left(\ln(r) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} + \frac{c_v^4 \sqrt{2}}{(\beta-4)^2} \frac{e^{-2\sqrt{2}R}}{R} \right)$$

iii. Desarrollo de la integral III = $\int_{\frac{R}{2}}^{\infty} 2\eta^2 \frac{f^2(r)}{r^2} (v^2(r) - 2v(r)) r dr$:

Reemplazando las función $f(r) = 1 - \frac{c_v^2}{2(\beta-4)} \frac{e^{-2\sqrt{2}r}}{r}$ para $\beta > 4$ y $v(r) = 1 +$

$c_v e^{-\sqrt{2}r} r^{1/2}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\text{III} &= 2\eta^2 \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \left(\frac{1}{r} - \frac{c_v^2}{(\beta-4)} \frac{e^{-2\sqrt{2}r}}{r^2} + \frac{c_v^4}{4(\beta-4)^2} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r^3} \right) \left(1 + 2c_v e^{-\sqrt{2}r} r^{1/2} + \right. \\
&\quad \left. c_v^2 e^{-2\sqrt{2}r} r - 2 - 2c_v e^{-\sqrt{2}r} r^{1/2} \right) dr \\
&= 2\eta^2 \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \left(\frac{1}{r} - \frac{c_v^2}{(\beta-4)} \frac{e^{-2\sqrt{2}r}}{r^2} + \frac{c_v^4}{4(\beta-4)^2} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r^3} \right) \left(-1 + c_v^2 e^{-2\sqrt{2}r} r \right) dr \\
&= 2\eta^2 \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \left(-\frac{1}{r} + c_v^2 e^{-2\sqrt{2}r} + \underbrace{\frac{c_v^2}{(\beta-4)} \frac{e^{-2\sqrt{2}r}}{r^2}}_{\approx 0} - \frac{c_v^4}{(\beta-4)} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r} - \right. \\
&\quad \left. \underbrace{\frac{c_v^4}{4(\beta-4)^2} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r^3}}_{\approx 0} + \underbrace{\frac{c_v^6}{4(\beta-4)^2} \frac{e^{-6\sqrt{2}r}}{r^2}}_{\approx 0} \right) dr \\
&= 2\eta^2 \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \left(\underbrace{-\frac{1}{r}}_A + \underbrace{c_v^2 e^{-2\sqrt{2}r}}_B - \underbrace{\frac{c_v^4}{(\beta-4)} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r}}_C \right) dr,
\end{aligned}$$

desarrollando las integrales A, B y C se obtendrá que:

$$A = \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} -\frac{1}{r} dr = -\ln(r) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty}$$

$$B = c_v^2 \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} e^{-2\sqrt{2}r} dr = -\frac{c_v^2}{2\sqrt{2}} e^{-2\sqrt{2}r} \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} = \frac{c_v^2 \sqrt{2}}{4} e^{-\sqrt{2}R}$$

$$\begin{aligned}
C &= \frac{c_v^4}{(\beta-4)} \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r} dr = \frac{c_v^4}{(\beta-4)} \left[\frac{-1}{4\sqrt{2}} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r} + \underbrace{\frac{1}{(4\sqrt{2})^2} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r^2} + \dots}_{\approx 0} \right] \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} \\
&= \frac{c_v^4}{(\beta-4)} \left[\frac{-1}{4\sqrt{2}} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r} \right] \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} = \frac{c_v^4 \sqrt{2}}{4(\beta-4)} \frac{e^{-2\sqrt{2}R}}{R}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\text{III} = 2\eta^2 \left(-\ln(r) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} + \frac{c_v^2 \sqrt{2}}{4} e^{-\sqrt{2}R} - \frac{c_v^4 \sqrt{2}}{4(\beta-4)} \frac{e^{-2\sqrt{2}R}}{R} \right)$$

iv. Desarrollando la integral $\text{IV} = \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} 4\eta^4 \lambda(f^2(r) - 1)^2 r dr$:

Reemplazando las función $f(r) = 1 - \frac{c_v^2}{2(\beta - 4)} \frac{e^{-2\sqrt{2}r}}{r}$ para $\beta > 4$, entonces:

$$\begin{aligned}
\text{IV} &= 4\eta^4 \lambda \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \left(-\frac{c_v^2}{(\beta - 4)} \frac{e^{-2\sqrt{2}r}}{r} + \frac{c_v^4}{4(\beta - 4)^2} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r^2} \right)^2 r dr \\
&= 4\eta^4 \lambda \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \left(\frac{c_v^4}{(\beta - 4)^2} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r^2} - \frac{c_v^6}{2(\beta - 4)^3} \frac{e^{-6\sqrt{2}r}}{r^3} + \frac{c_v^8}{16(\beta - 4)^4} \frac{e^{-8\sqrt{2}r}}{r^4} \right) r dr \\
&= 4\eta^4 \lambda \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \left(\frac{c_v^4}{(\beta - 4)^2} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r} - \underbrace{\frac{c_v^6}{2(\beta - 4)^3} \frac{e^{-6\sqrt{2}r}}{r^2}}_{\approx 0} + \underbrace{\frac{c_v^8}{16(\beta - 4)^4} \frac{e^{-8\sqrt{2}r}}{r^3}}_{\approx 0} \right) dr \\
&= \frac{4\eta^4 \lambda c_v^4}{(\beta - 4)} \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r} dr \\
&= \frac{4\eta^4 \lambda c_v^4}{(\beta - 4)} \left(\frac{-1}{4\sqrt{2}} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r} + \underbrace{\frac{1}{(4\sqrt{2})^2} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r^2} + \dots}_{\approx 0} \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} \\
&= \frac{4\eta^4 \lambda c_v^4}{(\beta - 4)} \left(\frac{-1}{4\sqrt{2}} \frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r} \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^{\infty} \\
&= \frac{\eta^4 \lambda c_v^4 \sqrt{2}}{(\beta - 4)} \frac{e^{-2\sqrt{2}R}}{R}
\end{aligned}$$