

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE CIENCIAS

“FENOMENOS NO - LINEALES.

LA ECUACION DE KdV y

EL METODO INVERSO A LA DISPERSION”

**TESIS PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL
DE LICENCIADO EN CIENCIAS CON MENCIÓN
EN FÍSICA.**

ANDRES H. LA ROSA FLORES

LIMA - PERU.

1984

A MIS PADRES
Y HERMANOS

PRESENTACION

En los últimos 25 años ha habido un considerable avance en la comprensión de los fenómenos no-lineales en Física. Expliquemos porqué el nombre de no-lineal.

El hombre siempre ha tratado de dar una explicación a los fenómenos que ocurren a su alrededor (la caída de los cuerpos (Newton), radiación de cuerpo negro, (Planck, etc.) . Ocurre que, al elaborar sus modelos que ofrezcan una explicación a los fenómenos observados, los físicos arriban a veces a una ec. diferencial lineal luego de efectuar algunas simplificaciones. En algunos cursos tales simplificaciones resultan acertadas en el sentido de que el modelo logra describir el fenómeno con aceptable aproximación. Para el estudio de estos problemas lineales se han desarrollado herramientas adecuadas: espacios vectoriales, series de Fourier, teoría de perturbación, etc.

Pero hay casos en que el modelo conduce a una ecuación diferencial no-lineal y una simplificación adicional, conducente a linearizar la ecuación, la aparta de la descripción esencial del problema; en tales casos no hay otra alternativa que resolverla directamente. Pero para tal tarea no se tenían, hasta hace pocos años, las herramientas adecuadas. Esto nos puede dar una pauta de cómo el desarrollo de la física tiene un li-

mitante en el lenguaje matemático del que dispone para elaborar sus modelos.

Con el advenimiento de la computadora los problemas no-lineales han podido ser abordados con mayor facilidad; con ella se ha logrado obtener soluciones numéricas, lo cual ha permitido idear métodos analíticos. Uno de ellos hace uso del Método Inverso a la Dispersión (M.I.D.) y es el que damos a conocer en una parte de nuestro trabajo.

El desarrollo de nuestro tema lo realizamos en base a querer resolver la ecuación de Korteweg de Vries: $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$. Ella aparece en hidrodinámica (ondas de agua en un canal poco profundo), propagación de ondas en un cristal anarmónico, colisión de ondas en plasma.

En el presente trabajo podemos identificar tres partes:

En la primera se ofrece la base analítica del M.I.D. Este constituye en sí todo un tema de estudio y para no desviar la atención de nuestro trabajo de la línea de estudio de fenómenos no-lineales, es que dedicamos el Capítulo 1 a presentar todos los resultados referentes a como funciona tal método y las justificaciones correspondientes las presentamos en los Complementos A, B, C y D.

La segunda parte está dedicada a idear un esquema de solución de problemas no lineales que permita ensamblar en él al

M.I.D. En el Capítulo 2 se construye tal esquema, uno de cuyos pasos principales consiste en asociar a cada problema no-lineal una adecuada familia de operadores lineales. Tal asociación es construida para tres ecuaciones no lineales.

Ec. de KdV
$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

Ec. modificada de KdV
$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0$$

Ec. de Schrodinger no lineal
$$u_{xx} + 2|u|^2u + iu_t = 0$$

En el capítulo 4 verificamos la aplicabilidad del esquema mencionado para resolver la ec. de KdV.

Finalmente, la tercera parte está dedicada a ofrecer una visión general de los hechos más importantes que han marcado el desarrollo en la comprensión de los fenómenos no-lineales. Esto lo presentamos en el Capítulo 3. En lo posible hemos tratado de complementar cada información con la cita bibliográfica correspondiente.

Mi agradecimiento a nuestro Profesor Holger Valqui. Su constancia en el trabajo ha sido buen ejemplo para ser perseverante en el estudio del presente tema que, inicialmente, me resultaba completamente nuevo. Siempre estuvo solícito en las consultas, aún en las horas de su merecido descanso. La motivación diaria que de él recibí permitió realizar este trabajo con el mayor de los gustos, con una alegría de estudiante.

Hago extensivo mi reconocimiento, también, a la Srta. Zoi la Vásquez por el mecanografiado de la presente tesis. Acompañando a su amabilidad cuenta con la cualidad de ser comprensiva con las contínuas exigencias que un estudiante por graduarse hace para con su trabajo.

A los amigos que contribuyen a formar un ambiente de estudio en la Facultad de Ciencias de la UNI, de ellos recibí siempre el aliento y exigencia por avanzar en el estudio del presente tema.

A. La Rosa

Lima, 10 de noviembre de 1984

INDICE GENERAL

	pág.
CAPITULO 1 EL METODO INVERSO A LA DISPERSION	
1.- INTRODUCCION	2
2.- EL FENOMENO DE DISPERSION (Casos que pueden presentarse)	4
3.- ECUACION DE SCHRODINGER	8
3.1 Descripción General (Notación a usar)	8
3.2 Las Funciones de Jost	12
3.3 Otra Representación Integral para las Fun ciones de Jost (Las funciones K y K ₋)	15
3.4 Estados Ligados y Comportamiento Asintóti co de las Soluciones	18
4.- ECUACION DE MARCHENKO	22
4.1 Interpretación del Fenómeno de Dispersión mediante las Funciones de Jost.	22
4.2 La Ecuación de Marchenko' y los Parámetros de Dispersión.	24
CAPITULO 2 PROBLEMAS NO-LINEALES Y EL METODO INVERSO A LA DISPERSION	
1.- INTRODUCCION	31
2.- EL M.I.D. COMO METODO DE SOLUCION DE PROBLEMAS NO LINEALES	35
2.1 Problema no-lineal	35
2.2 Generalización del M.I.D.	35
2.3 Insertamos el problema no-lineal 2.1 en el esquema del M.I.D.	37

2.4	Procedimiento a seguir	39
2.5	Herramientas que necesitamos para llevar a cabo el planteamiento hecho en 2.4	40
3.-	COMO ASOCIAR A LA ECUACION NO LINEAL (2-1) UNA FAMILIA DE OPERADORES LINEALES	41
3.1	Criterio a seguir	
3.2	¿Qué es una familia de operadores equivalentes? Forma de identificar los operadores equivalentes.	43
3.3	Esquema para asociar una familia de operadores equivalentes a una ecuación no-lineal.	45
4.-	APLICACIONES	48
4.1	El operador de Schrodinger y la ec. de KdV	48
4.2	Ecuación modificada de KdV	52
4.3	Ecuación de Schrodinger no-lineal	55
Anexo 1		59
Anexo 2		61
Anexo 3		64
CAPITULO 3 : HECHOS QUE HAN CONTRIBUIDO A UNA MEJOR COMPRESION DE LOS FENOMENOS NO LINEALES		
1.-	INTRODUCCION	67
2.-	SOLITONES	67
2.1	Cómo se generan ondas de perfil rígido	67
2.2	Qué es un solitón?	73

2.3	Porqué interesa el estudio de los solitones?	76
3.-	COMO LA FISICA SE INTERESA EN EL ESTUDIO DE LOS SOLITONES	77
3.1	Observaciones hechas por Scott Russell en un canal de agua (1834)	77
3.2	Conducción térmica en los sólidos(1955)	80
3.3	El descubrimiento de Zubusky y Kruskal: el solitón (1965).	83
4.-	POSTERIORES AVANCES EN EL ENTENDIMIENTO DE LOS FENOMENOS NO-LINEALES	86
4.1	La transformación de Miura y el Método inverso a la dispersión.	86
4.2	Leyes de Conservación y Estructura hamiltoniana	90
4.3	Unificación de los modelos.	93
5.-	HIDRODINAMICA	95
5.1	Ecuaciones que gobiernan los fenómenos en hidrodinámica.	95
5.2	Obtención de la ec. de KdV.	104
	Anexo 1	112
CAPITULO 4 : SOLUCIONES ANALITICAS DE LA ECUACION de KdV		
1.-	COMO SOLUCIONAR LA ECUACION DE KdV USANDO EL M.I.D.	116
1.1	Esquema general de solución	116
1.2	Cómo evolucionan los parámetros de dispersión.	120
2.-	OBTENCION DE LOS SOLITONES DE LA EC. de KdV.	124

2.1 Ejemplo 1	125
2.2 Ejemplo 2	127
Anexo 1	137
Anexo 2	142
Anexo 3	145

COMPLEMENTO A

CASO DIRECTO:

SOLUCIONAMOS LA ECUACION DE SCHRODINGER

1.- Introducción	148
2.- Potencial Delta	149
3.- Potencial Pozo Rectangular	153
4.- Estudio del Potencial $U(x) = -U_0 \text{sech}^2 \alpha x$	158
4.1 Ondas incidente, reflejada y transmitida	158
4.2 Potenciales transparentes	163
4.2.1 Condiciones impuestas a Q_0 y α para que no haya onda reflejada	163
4.2.2 Obtención de las funciones de onda que describen estados ligados	165
Ejemplo 1	168
Ejemplo 2	170
Ejemplo 3	172

COMPLEMENTO B

LAS FUNCIONES DE JOST

1.- La Ecuación de Schrodinger expresada en forma de Ec. integral	178
---	-----

2.- Ecuaciones integrales que deben satisfacer las funciones de Jost.	181
3.- Condiciones bajo las cuales tales ecuaciones admiten solución	183
4.- Unicidad de las Funciones de Jost	187
5.- Comportamiento de las funciones de Jost ϕ y ψ cuando $ k \longrightarrow \infty$	190
6.- Relaciones entre las funciones de Jost	191
7.- El wronskiano de 2 soluciones de la ec. de Schrodinger.	194
Anexo 1	197
COMPLEMENTO C	198
INTERPRETACION DEL FENOMENO DE DISPERSION MEDIANTE LAS FUNCIONES DE JOST	198
<u>PARTE 1</u> $k \in \mathbb{R}$	200
1.1 Ondas incidentes provenientes de la región $x \longrightarrow \infty$. Coeficientes de reflexión y transmisión $R(k)$, $T(k)$.	200
1.2 Ondas incidentes proveniente de $x \longrightarrow -\infty$. Coeficientes de reflexión y transmisión $R(k)$, $T(k)$.	203
1.3 Relaciones entre los coeficientes de reflexión y transmisión	
<u>PARTE 2</u> Trabajamos con valores de k complejos $k = \xi + i\eta$	206
2.1 Estados ligados	206
2.2 Expresiones analíticas para $a(k)$	208
2.3 Propiedades analíticas para los estados ligados.	211
2.4 Estudio de los polos de la función T .	215

Anexo 1	221
Anexo 2	223
COMPLEMENTO D	225
EL PROBLEMA INVERSO:	225
RECUPERACION DEL POTENCIAL A PARTIR DE LOS PARAMETROS DE DISPERSION	
1.- Otra representación integral de las funciones de Jost Φ y Ψ La función K y su relación con el potencial Q	226
2.- Propiedades de la función K	228
3.- Ecuación de Marchenko	230
Anexo 1	236
Anexo 2	243

CAPITULO 1

EL METODO INVERSO A LA DISPERSION

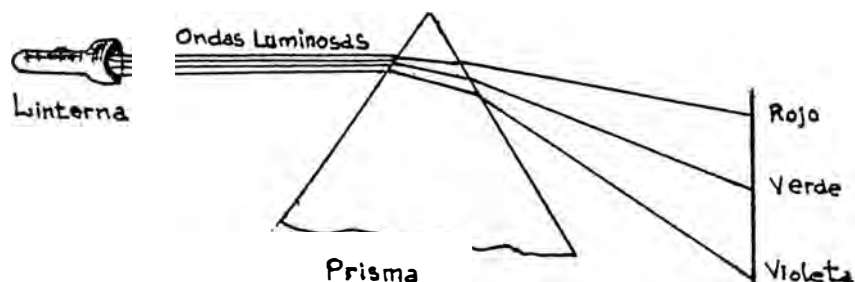
1. INTRODUCCION

¿ Puede Ud. escuchar la forma de un tambor?

Cuando una onda o partícula incide sobre un cuerpo, la mutua interacción trae como consecuencia que ambos vean afectadas sus propiedades.



Es el caso de las ondas luminosas que pasan de un medio a otro produciéndose el fenómeno de refracción. La dirección con que se propagan en el aire las ondas incidentes provenientes del sol, se ve afectada cuando atraviesan el agua. A su vez el agua va aumentando su temperatura a medida que llega mayor radiación. El mismo tipo de fenómeno ocurre cuando un rayo de luz solar se descompone en varios colores al atravesar un prisma.



Cuando un problema de interacción es formalizado matemáticamente (recuérdese que se buscan modelos que describan lo más correctamente posible los fenómenos observados en la naturaleza), a aquella zona en que la interacción es marcadamente apreciable la caracterizamos por una función potencial V .

Por ejemplo: considérese el núcleo (carga Q) de un átomo de oro, en reposo con respecto a un sistema de referencia cuyo origen lo elegimos en la posición del núcleo. Sobre él inciden partículas α (carga positiva) que inicialmente tienen energía cinética E_0 (Ver Fig. 1). Al estar muy lejos del núcleo la interacción es casi nula, pero a medida que ésta se va acercando la interacción se hace ca-

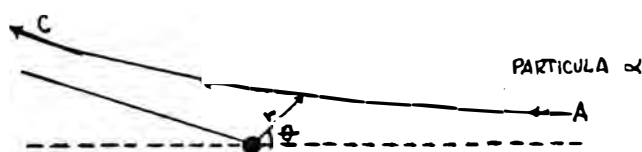


Fig. 1 Partícula α en interacción con un núcleo

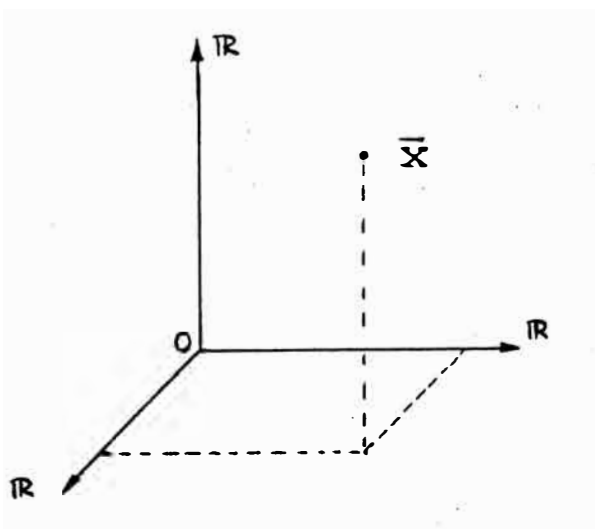
da vez más importante lo cual se traduce en una desviación de la dirección de incidencia que inicialmente tenía la par-

tícula α ; finalmente la partícula se aleja y la interacción nuevamente tiende a anularse. Se sabe que las propiedades que derivan de este tipo de interacción pueden

ser explicadas si consideramos un potencial de la forma $V \sim \frac{1}{r}$. Nosotros haremos aquí algo similar con un problema general : en base a datos que se miden lejos de la zona de interacción reconstruimos el potencial que lo describe.

2. EL FENOMENO DE DISPERSION (Casos que pueden presentarse)

Sea $x = (x, y, z)$ la coordenada de un punto, perteneciente a una región en la cual se lleva a cabo una interacción con respecto a una referencia previamente elegida. Generalmente se elige el origen O de esta referencia en algún punto de la región en que la interacción es importante. Que la interacción sea importante en una determinada región del espacio significa que allí ciertas propiedades de los cuerpos varían apreciablemente como consecuencia de la interacción. Por otro lado cuando escribamos: $V(x) \approx 0$, significa que tal x es la coordenada de un punto en que la interacción es casi nula.



Se elige el origen O de esta referencia en algún punto de la región en que la interacción es importante. Que la interacción sea importante en una determinada

nada región del espacio significa que allí ciertas propiedades de los cuerpos varían apreciablemente como consecuencia de la interacción. Por otro lado cuando escribamos: $V(x) \approx 0$, significa que tal x es la coordenada de un punto en que la interacción es casi nula.

Identificamos las siguientes regiones del espacio.

REGION DE INTERACCION.-

Región del espacio donde la interacción es importante.

REGION DE INCIDENCIA.-

En todo punto de ella se tiene $V(\bar{x}) \approx 0$. Des de ella se hace incidir radiación o un chorro de partículas hacia la zona de interacción.

REGION DE DETECCION.-

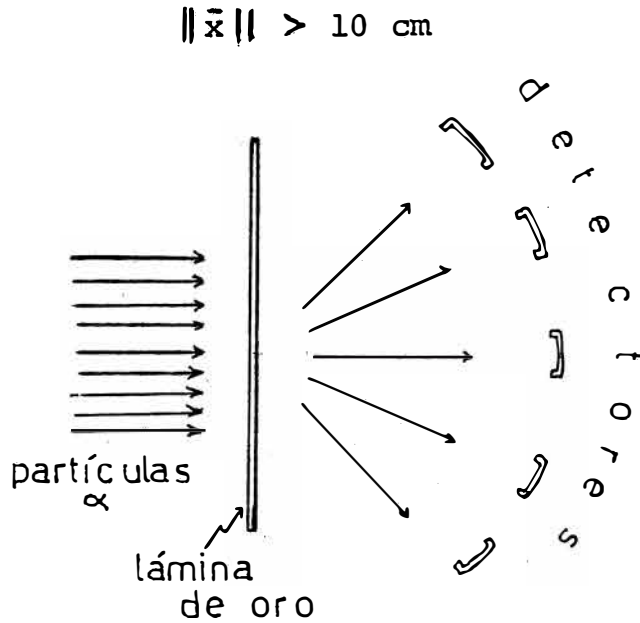
Aquí se detectan las partículas o radiación que, luego de interactuar, emergen de la región respectiva.

En todo punto de ella se cumple $V(\bar{x}) \approx 0$

Cuando no nos encontremos en la región de interacción afirmaremos que: estamos en la región $\|\bar{x}\| \longrightarrow \infty$. Así pues el criterio para afirmar que estamos en la región $\|\bar{x}\| \rightarrow \infty$ es que allí $V(\bar{x}) \approx 0$ y se sobreentiende que estamos fuera de la zona de interacción.

Para estar en la región $\|\bar{x}\| \rightarrow \infty$ depende del fenómeno

en estudio. Por ejemplo, puede ser suficiente que:

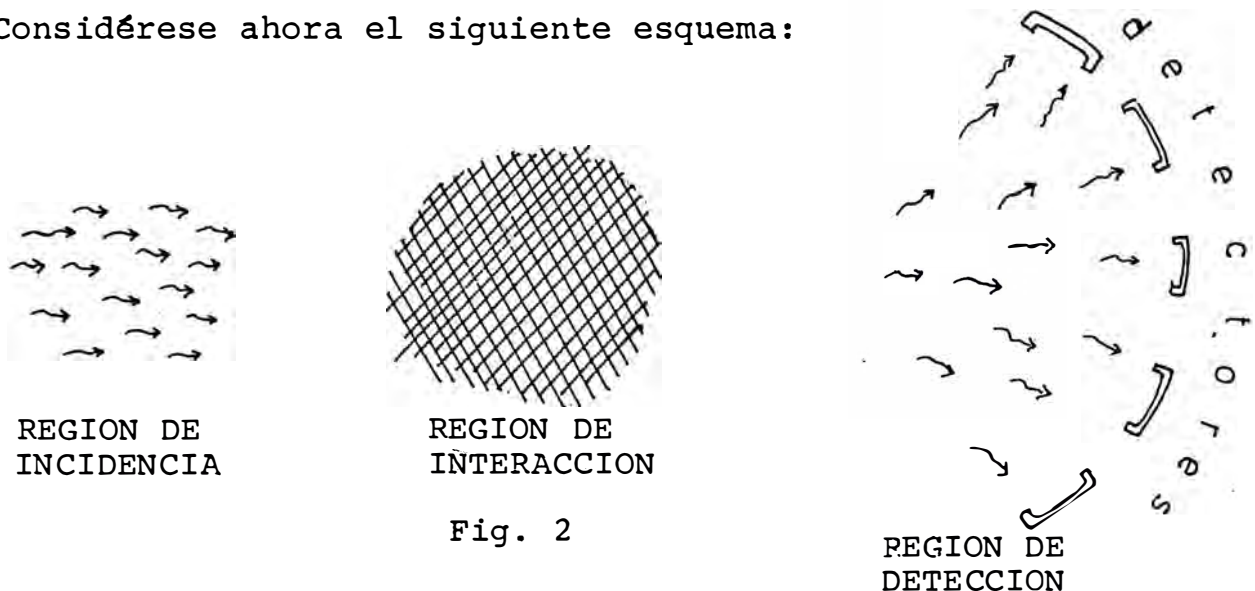


este es el caso de la dispersión de Rutherford en que los detectores de las partículas α , dispersadas por los núcleos de oro contenidos en una lámina delgada, se

colocan a unos 10 a 30 cm de ella.

ó quizás se necesite que $\|\bar{x}\| > 2 \times 10^6 \text{ km}$ cuando nos encontremos estudiando la interacción gravitatoria entre dos cuerpos de masas similares a las de la tierra y la de un hombre, (para tal distancia la fuerza de atracción es de aproximadamente 1 gramo fuerza.)

Considérese ahora el siguiente esquema:



en el cual se desea mostrar un chorro de partículas o radiación emergiendo luego de interactuar con el potencial V , distribuyéndose en el espacio de una manera que puede diferir de aquella que tenía en la zona de incidencia.

En el estudio de este fenómeno pueden presentarse dos casos:

Caso Directo: La función potencial " V " es conocida

Entonces, estamos en condiciones, en principio, de calcular la posible distribución de la radiación emergente y por ende qué parte de ella será captada por cada uno de nuestros detectores (situados en la región $\|\vec{x}\| \rightarrow \infty$) Para llevar a cabo tal tarea, nuestras herramientas son las leyes de Newton, o la ecuación de Schrodinger, además de nuestra experiencia previa (que nos indica qué tipo de simplificaciones son viables).

Caso Inverso:

No se conoce el potencial V que caracteriza a la zona de interacción y todo lo que tenemos a nuestra disposición son los datos experimentales proporcionados por los

detectores, los cuales están situados en una región distante de la zona de interacción. Nuestra tarea es reconstruir el potencial V en base a estos datos asintóticos.

En el presente capítulo nos interesamos en resolver este último caso y para ello usaremos el METODO INVERSO a la DISPERSION (M.I.D.) . Las secciones siguientes están encaminadas a explicar en qué consiste tal método.

3. LA ECUACION DE SCHRODINGER

3.1 Descripción general

Para estudiar el comportamiento de partículas de masa m en interacción con un potencial V , usamos la ecuación de Schrodinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (\text{caso unidimensional}) \quad (1-1)$$

Ecuación diferencial LINEAL, donde

x es la coordenada espacial

t es la coordenada temporal

$V = V(x)$... función potencial

$\psi = \psi(x,t)$. llamada función de onda. A partir de ella se puede obtener toda la información que se requiera del sistema en estudio.

m masa de cada una de las partículas (las cua

les no interactúan entre si) incidentes a la zona de interacción.

Al considerar que el potencial de interacción no depende de la coordenada temporal, podemos usar separación de variables para resolver (1-1). Obtenemos

$$\Psi(x,t) = f(x) \exp(-i\omega t), \quad \omega = E/\hbar$$

y f debe satisfacer

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 f}{dx^2} + Vf = Ef \quad \text{Ec. de Schrodinger estacionaria} \quad (1-2)$$

la constante E es interpretada como la energía del sistema en interacción.

Puesto que f es función sólo de una variable, en adelante el operador de derivación lo denotaremos por D y así usaremos Df en vez de $\frac{d}{dx}f$, D^2f en vez de $\frac{d^2}{dx^2}f$

Usando

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E, \quad Q(x) = \frac{2m}{\hbar^2} V(x)$$

la ec. (1-2) toma la forma

$$-D^2f + Qf = k^2f \quad (1-3)$$

En ella podemos identificar un problema de valores propios para el operador H

$$H = -D^2 + \hat{Q} \quad (1-4)$$

$$Hf = k^2f$$

donde $\hat{Q}(f) = Qf$.

Tendremos en cuenta lo siguiente:

- Las funciones propias las buscaremos en el espacio vectorial $\xi = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ continua, } Df \text{ continua} \right\}$
- El problema 1-3 es resuelto especificando previamente un valor fijo de $k \in \mathbb{C}^*$
(\mathbb{C} es el campo de los números complejos)
- $Q(x) \underset{|x| \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$



Comentario

Hemos afirmado que E se interpreta como energía del sistema en interacción, y estamos acostumbrados a trabajar con valores reales de E . Al expresarla como $E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$ puede llamarnos la atención qué sentido tiene considerar a k como un número complejo $k = \xi + i\eta$, pues E tomaría un valor complejo.

Lo que se ha hecho en realidad es una generalización y ésta se justifica en el contexto del tema de problemas NO LINEALES, cuyo estudio deseamos abordar. Allí uno encuentra ecuaciones que pueden ser expresadas en la forma de la ecuación de Schrodinger, ec.1-2, pero con potencial complejo. (Ver Ref. 2, Pág. 20)

* Lo que deseamos recalcar es que en las operaciones algebraicas que se llevan a cabo para hallar las funciones propias de H , en todo momento el valor de k permanece fijo. Es a partir de tales operaciones que se va evidenciando para qué valores de k tienen validez los procedimientos mismos.

Aún cuando en este capítulo estamos considerando un potencial real, nuestra actitud es de considerar que la ecuación (1-4) admite soluciones con $k = \xi + i\eta$ (bajo ciertas condiciones el teorema 1, presentado en las páginas siguientes, confirma esto).

Así mismo, la posición en el plano complejo de ciertos autovalores $k = k_j$, en que su correspondiente autofunción f_j cumple $\int_{-\infty}^{\infty} |f_j(x)|^2 dx < \infty$, está relacionada con el hecho de si el potencial Q es real o complejo. ▲

Resulta conveniente usar la siguiente notación:

k^Y denota la función propia del operador H correspondiente al valor propio k^2 (1-5a)

$$k^Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

La ecuación (1-3) la expresaremos en la forma

$$-D^2 k^Y + Q k^Y = k^2 k^Y \quad (1-5b)$$

reiterando nuestra exigencia que

$$Q(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$$

y nos referiremos a ella también como la ECUACION DE SCHRODINGER ESTACIONARIA, pues, salvo constantes, ella es la misma ecuación dada en 1-2.

o Si, como esperamos, para cada valor de $k \in \mathbb{C}$ obtenemos su correspondiente función propia ${}_k Y$, con este conjunto de funciones $\{ {}_k Y \}$ definimos la función Y

$$Y: \mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{tal que} \quad Y(x, k) = {}_k Y(x) \quad (1-5c)$$

3.2 Las Funciones de Jost

Nuestro objetivo es recuperar la función potencial en base a los datos asintóticos que se miden en la región $|x| \longrightarrow \infty$; tal información debe estar contenida en la función de onda ${}_k Y$ que soluciona la ec. de Schrodinger. La ec. (1-5b) indica que el comportamiento asintótico de ${}_k Y$ es de la forma

$${}_k Y(x) \xrightarrow{|x| \longrightarrow \infty} A \exp(-ikx) + B \exp(ikx)$$

donde A y B son constantes a elegirse para adecuar ${}_k Y$ al problema específico que se está estudiando.

Aquí haremos lo siguiente:

Para un valor fijo de k buscamos cuatro soluciones de la ec. (1-5b) que tengan el siguiente comportamiento asintótico:

$$\begin{array}{ll}
 {}_k\Phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \exp(-ikx) & {}_k\Psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \exp(ikx) \\
 {}_k\bar{\Phi}(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \exp(ikx) & {}_k\bar{\Psi}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \exp(-ikx)
 \end{array}
 \tag{1-6}$$

$$k = \xi + i\eta$$

Para dar un poco de generalidad al problema admitamos, por ahora, la posibilidad que η pueda elegirse positivo, cero, o negativo en cada uno de los cuatro casos.

Notar que en (1-6) no se impone ninguna condición al comportamiento de las funciones ${}_k\Psi$ y ${}_k\bar{\Psi}$ en la región $x \rightarrow -\infty$ ni a ${}_k\Phi$ y ${}_k\bar{\Phi}$ en $x \rightarrow \infty$

Cuando usamos el símbolo ${}_k\bar{\Psi}$ NO estamos denotando al conjugado complejo de la función ${}_k\Psi$ ni estamos haciendo alguna otra operación con ella. Es simplemente un símbolo para representar a una de las funciones cuyo comportamiento asintótico se indica en(1-6); posteriormente se verá cómo están relacionadas ${}_k\bar{\Psi}$ y ${}_k\Psi$ (Ver complemento B, expresión (30)). El mismo comentario vale para las funciones ${}_k\bar{\Phi}$ y ${}_k\Phi$

En el complemento B mostramos que las soluciones a la ecuación de Schrodinger estacionaria (Ec.1-5b), que tengan el comportamiento exigido en(1-6), deben satisfacer

las siguientes ecuaciones integrales

$${}_k\Upsilon(x) = \exp(ikx) + \frac{1}{k} \int_x^\infty Q(v) \operatorname{Sen} k(v-x) {}_k\Upsilon(v) dv$$

$${}_k\bar{\Upsilon}(x) = \exp(-ikx) + \frac{1}{k} \int_x^\infty Q(v) \operatorname{Sen} k(v-x) {}_k\bar{\Upsilon}(v) dv$$

$${}_k\Phi(x) = \exp(-ikx) - \frac{1}{k} \int_{-\infty}^x Q(v) \operatorname{Sen} k(v-x) {}_k\Phi(v) dv$$

$${}_k\bar{\Phi}(x) = \exp(ikx) - \frac{1}{k} \int_{-\infty}^x Q(v) \operatorname{Sen} k(v-x) {}_k\bar{\Phi}(v) dv$$

(1-7)

¿Tienen solución?

En el Complemento B, sección 3, mostramos las condiciones bajo las cuales la ecuación integral para ${}_k\Phi$ admite solución; el análisis de este caso particular nos permite comprender el siguiente teorema (Ver Ref. 1, págs.105-106.. Usaremos la notación especificada en 1-5.)

TEOREMA 1

Si $\int_{-\infty}^{\infty} (1+|v|) |Q(v)| dv < \infty$, la ec. de Schrodinger (1-5b) sujeta a las condiciones (1-6) satisface lo siguiente:

- o Tiene como soluciones, para cada valor fijo de k con $\operatorname{Im} k > 0$, a las funciones $\Upsilon = \Upsilon(x, k)$, $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}(x, k)$ las cuales satisfacen las correspondientes ecuaciones integrales (1-7).

- Para cada valor fijo de $x \in \mathbb{R}$, las funciones Ψ, Φ , $\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ son continuas con respecto a k en $\text{Im}k \geq 0$ y analíticas con respecto a k en $\text{Im}k > 0$
- Si además $\int_{-\infty}^{\infty} (1+v^2) |Q(v)| dv < \infty$ entonces $\frac{\partial \Psi}{\partial k}$ y $\frac{\partial \Phi}{\partial k}$ son continuas en $\text{Im}k \geq 0$ y analíticas en $\text{Im}k > 0$.

Análogas propiedades cumplen las funciones Ψ, Φ en $\text{Im}k < 0$.

TEOREMA 2

Las funciones Ψ, Ψ, Φ, Φ son únicas, si se cumplen las condiciones exigidas en el Teorema 1 (ver demostración en la sección 4 del Complemento B)

Las funciones a las que nos hacen referencia los Teoremas 1 y 2, reciben el nombre de FUNCIONES DE JOST.

3.3 Otra Representación Integral para las Funciones de Jost.

La Función K

Resulta conveniente, (la expresión 1-10 lo justificará) plantear una segunda expresión integral para la función Ψ_k (y análogamente para Φ_k , ver 1-11a)

$$\text{Sea } \Psi_k(x) = \exp(ikx) + \int_x^{\infty} K(x,y) \exp(iky) dy \quad (1-8)$$

Al reemplazar esta expresión en (1-7) y luego de algunos procedimientos algebraicos, obtenemos que la función K de-

be satisfacer

$$K(x,y) = \frac{1}{2} \int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} Q(v) \left[1 + \int_v^{y+(v-x)} K(v,u) du \right] dv +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_x^{\frac{x+y}{2}} \int_{y-(v-x)}^{y+(v-x)} Q(v) K(v,u) du dv$$

(1-9)

para $y \geq x$

(ver Complemento D, ecuación 9)

Esta expresión de apariencia complicada resulta, como veremos a continuación, de gran utilidad. Evaluando (1-9) en $y = x$ obtenemos

$$K(x,x) = \frac{1}{2} \int_x^{\infty} Q(v) dv$$

derivando

$$Q(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x,x) \tag{1-10}$$

Este resultado es muy significativo, pues relaciona:

- el potencial Q de la ecuación de Schrodinger $-D^2 \Psi + Q \Psi = k^2 \Psi$

con

- una de sus soluciones, la función ${}_k\Psi$

$${}_k\Psi(x) = \exp(ikx) + \int_x^{\infty} K(x,y) \exp(iky) dy$$

lo que nos lleva a plantear el siguiente análisis preliminar.

- o. Dado el potencial Q , procedemos a hallar las soluciones de la Ecuación de Schrodinger, en particular la función ${}_k\Psi$: CASO DIRECTO
- o. "Dada la solución ${}_k\Psi$ de la ecuación de Schrodinger" en la forma ${}_k\Psi(x) = \exp(ikx) + \int_x^\infty K(x,y) \exp(iky) dy$ el potencial correspondiente que dió lugar a esta función puede ser reconstruido tomando simplemente la derivada de la función g , donde $g(x) = -2K(x,x)$: CASO INVERSO



Comentario

Hemos puesto comillas a la expresión "Dada una solución ${}_k\Psi$..." pues en realidad no conocemos, hasta el momento, dicha función ${}_k\Psi$. Para que ella quede determinada debemos conocer K y a esta última sólo podríamos obtenerla resolviendo la ecuación 1-9. Sin embargo, notemos que (1-9) es una ecuación integral para K en la que interviene Q explícitamente. De manera que aún no estamos ante la solución del problema inverso.

Lo importante es que ya tenemos una relación entre el potencial Q y la función K . Nuestros pasos siguientes deben dirigirse a buscar un camino, distinto al que plantea (1-9), que permita hallar la función K sin que intervenga Q explícitamente. (En la sección 4.2 concretamos esta idea). ▲

La Función K_-

En forma similar a (1-8) se procede con ϕ_k

Planteando

$$\phi_k(x) = \exp(-ikx) + \int_{-\infty}^x K_-(x,y) \exp(-iky) dy \quad (1-11a)$$

se obtiene

$$\frac{d}{dx} K_-(x,x) = \frac{1}{2} Q(x) \quad (1-11b)$$

3.4 Estados Ligados y Comportamiento Asintótico de las Soluciones

La Ec. de Schrodinger estacionaria (1-5b) nos indica que el comportamiento de las soluciones en la región $|x| \rightarrow \infty$ es de la forma

$$\phi_k^Y(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} A \exp(ikx) + B \exp(-ikx), \quad k \in \mathbb{C} \quad (1-12)$$

donde A y B son constantes,

Consideremos el caso específico de la función de Jost ϕ_k (k fijo) las condiciones indicadas en la hipótesis del Teo

rema 1 sabemos que dicha solución existe y es única. Su comportamiento en la región $x \longrightarrow -\infty$ es

$${}_k\Phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \exp(-ikx) \quad \text{Im}k \geq 0 \quad (1-13)$$

pero no conocemos su comportamiento específico en la región $x \longrightarrow \infty$, sin embargo (1-12) nos indica cómo debemos esperar que sea. En base a ella planteamos lo siguiente:

$${}_k\Phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} a(k) \exp(-ikx) + b(k) \exp(ikx), \quad (1-14)$$

k fijo, $\text{Im}k \geq 0$

Ahora, puesto que podemos elegir cada vez distintos valores de k , con $\text{Im}k \geq 0$, a cada ${}_k\Phi$ le corresponde su valor $a(k)$. Construimos entonces la siguiente función:

$$a : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

A cada valor de k , con $\text{Im}k \geq 0$, la función

$$"a" \text{ le hace corresponder el valor } a(k) \text{ da} \quad (1-15)$$

do en (1-14)

En forma similar procedemos con $b(k)$

El estudio de las funciones "a" y "b", las cuales tienen un rol importante en el M.I.D., lo presentamos en el complemento C. A continuación una breve descripción de sus

propiedades.

De acuerdo a (C-10) tenemos

$$|a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2, \quad k \text{ real} \quad (1-16)$$

Una forma general para expresar $a(k)$ se da en (C-16)

$$a(k) = \frac{W(k\phi, k\psi)}{2ik}, \quad \text{Im}k \geq 0 \quad (1-17)^*$$

Cuando una solución, no nula, de la ec. de Schrodinger 1-5b sea de cuadrado integrable diremos que ella describe un estado ligado.** O sea

$$k^Y \text{ describe un estado ligado} \iff 0 < \int_{-\infty}^{\infty} |k^Y(x)|^2 dx < \infty \quad (1-18)$$

En (C-13) se indica que para valores de $k = k_j$, cuya correspondiente función $k_j \phi$ describe un estado ligado, se cumple $a(k_j) = 0$. La posición, en el plano complejo, de los números k_j está relacionada con el potencial; en efecto, si en (1-5b) la función Q es real, puede demostrarse que tales autovalores los encontraremos situados en el eje imaginario (ver C-20). Así

* $W(f,g) = fDg - gDf$, wronskiano de las funciones f y g .

** Puesto que, para tal caso, la probabilidad de encontrar la partícula en la región $|x| \longrightarrow \infty$ es prácticamente nula.

$$\left[\begin{array}{l} k_j \phi \text{ describe un estado ligado,} \\ Q \text{ es una función real.} \\ \text{Im}k_j > 0 . \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} a(k_j) = 0 \\ \text{real}(k_j) = 0 \end{array} \quad (1-19)^*$$

Dadas las propiedades de las funciones de Jost especificadas en el teorema 1, la expresión (1-17) nos indica que "a" es una función analítica en $\text{Im}k > 0$ y continua en $\text{Im}k \geq 0$. Ahora, de las funciones analíticas no nulas sabemos que ellas se anulan sóloamente en puntos aislados del plano complejo (ver Ref. 24 , pág. 230, teorema 16). Complementando esta información con el hecho que $a(k) \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} 1$, se concluye en C-19 que sólo hay un número finito N de valores discretos $k = k_j$ en los cuales $a(k_j) = 0$

$$a(k_j) = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots N \quad (1-20)$$

$$\text{Im}k_j > 0$$

Para $k = k_j$, en (1-17) obtenemos $W(k_j \phi, k_j \psi) = 0$ y así las funciones $k_j \phi$ y $k_j \psi$ son linealmente dependientes

$$k_j \phi = b_j k_j \psi \quad (1-21)$$

Entonces, la función $k_j \psi$ resulta ser también de cuadrado integrable. Introducimos la siguiente notación

* "en un problema de autovalores (de un operador lineal) equivalente a (1-5b) con potencial complejo, los valores k_j no necesariamente se encontrarán en el eje imaginario" (Ref. 2 Pág 53).

$$d_j = \left[\int_{-\infty}^{\infty} k_j^2 \Psi^2(x) dx \right]^{-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (1-22)$$

De acuerdo a (C-21) tenemos que :

$$k_j^{\Psi} \text{ y } k_j^{\Phi}, \text{ son funciones reales} \quad (1-23)$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

4. ECUACION DE MARCHENKO

4.1 Interpretación del Fenómeno de Dispersión Mediante las Funciones de Jost

Tal como se indica en (1-2), para la ecuación de Schrodinger(1-1) estamos considerando soluciones de la forma

$$\Psi(x, t) = f(x) \exp(-i\omega t), \quad \omega = E/\hbar$$

La función f debe ser solución de la ecuación estacionaria (1-5b); consideremos el caso en que $f = k^{\Phi}$

$$\Psi(x, t) = k^{\Phi}(x) \exp(-i\omega t) \quad (1-24)$$

Teniendo en cuenta (1-13) y (1-14) resulta que :

$$\Psi(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \exp[-i(kx + \omega t)] \quad (1-25)$$

$$\Psi(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} a(k) \exp[-i(kx + \omega t)] + b(k) \exp[i(kx - \omega t)] \quad (1-26)$$

Estas expresiones son válidas para $\text{Im}k \gg 0$

Para valores de k real positivo la expresión (1-25) describe una onda desplazándose hacia la izquierda y (1-26) describe una onda avanzando hacia la izquierda y otra, en general de diferente amplitud, desplazándose hacia la derecha. Esto sugiere usar la función Ψ , que se da en (1-24), para describir el fenómeno de dispersión esquematizado en la fig. 3

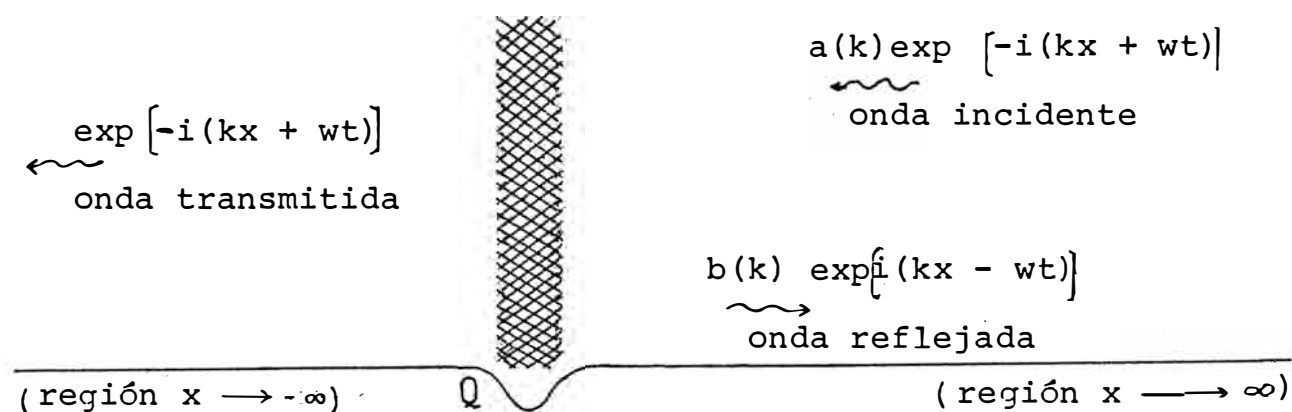


Fig. 3 Ondas incidentes en interacción con el potencial Q . Esto da lugar a ondas reflejada y transmitida (estamos considerando k real y positiva)

En adelante prescindimos del término $\exp(-i\omega t)$, su presencia en las soluciones de (1-1) queda sobreentendida y trabajaremos sólo con las soluciones de la ec. estacionaria (1-5b). Así, por ejemplo, en vez de referirnos a la función Ψ , dada en 1-24, diremos simplemente que la función de Jost Φ_k describe el fenómeno de dispersión esquematizado en la Fig. 3.

4.2 La Ecuación de Marchenko y los Parámetros de Dispersión.

Contamos ahora con las herramientas adecuadas para concretizar la idea esbozada en el primer párrafo de la pág. 18. La ecuación que deseamos construir para la función K , en la que no intervenga el potencial Q explícitamente, tiene como punto de partida el fenómeno de dispersión esquematizado en la Fig. 3 e interpretado matemáticamente por la función de Jost ϕ_k .

Definamos las funciones T y R

$$T(k) = \frac{1}{a(k)} \quad , \quad R(k) = \frac{b(k)}{a(k)} \quad ; \quad \text{Im}k \geq 0 \quad (1-27)$$

donde $a(k)$ y $b(k)$ son los valores que aparecen en (1-26).

Utilicemos ahora el resultado (B-35); a partir de él concluiremos que, para un valor fijo de k real no nulo, ψ_k^+ y ψ_k^- forman una base del espacio de las funciones que son solución de la ec. 1-5b. Siendo ϕ_k elemento de este espacio, puede ser expresada como una combinación lineal de aquellas

$$\phi_k(x) = a(k) \overline{\psi_k^+}(x) + b(k) \psi_k^-(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1-28)$$

$k \text{ real}$

Teniendo en cuenta el comportamiento de ψ_k^+ y ψ_k^- en

$x \longrightarrow \infty$, indicado por (1-6), en (1-28) se cumple
 $\phi(x) \longrightarrow a(k) \exp(-ikx) + b(k) \exp(ikx)$, resultado que con-
 cuerda con (1-26).

Dividiendo (1-28) entre $a(k)$, (la expresión 1-16 nos indica
 que $a(k) \neq 0$, $\forall k$ real), obtenemos

$$T(k) \phi(x) = \bar{\Psi}(x) + R(k) \Psi(x), \quad k \text{ real} \quad (1-29)$$

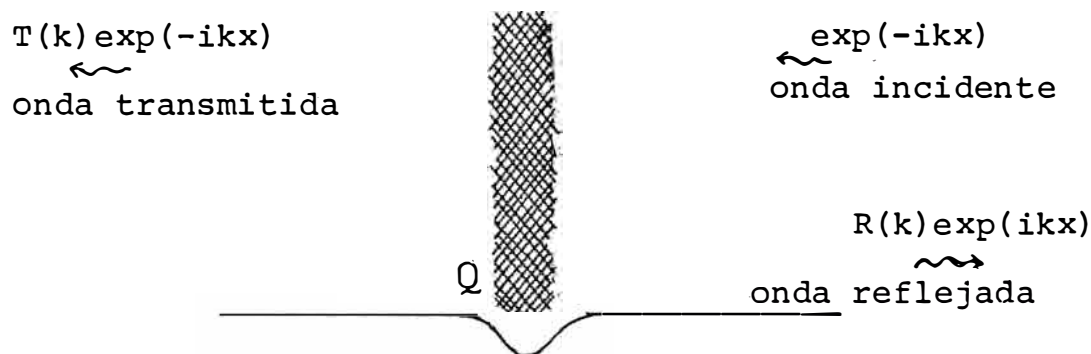


Fig. 4. Fenómeno de dispersión descrito por 1-29.

Para este caso, k real positivo, $T(k)$ y $R(k)$ pueden
 interpretarse como coeficientes de transmisión y re-
 flexión respectivamente.

Empleando la notación (1-5c) y el resultado B-30, el cual
 indica $\bar{\Psi}(x,k) = \Psi^*(x,k)$ cuando k es real, en 1-29 tenemos

$$T(k) \phi(x,k) = \Psi^*(x,k) + R(k) \Psi(x,k), \quad k \text{ real} \quad (1-30)$$

A fin de hacer intervenir las funciones K y K^* , en (1-30)
 reordenamos los sumandos

$$\begin{aligned} [T(k) - 1] \phi(x,k) = & [\Psi(x,k) - \exp(ikx)]^* + R(k) [\Psi(x,k) - \exp(ikx)] + \\ & + R(k) \exp(ikx) - [\phi(x,k) - \exp(-ikx)] \end{aligned}$$

reemplazando aquí (1-8) y (1-11a), se obtiene una expresión en la que cada sumando será considerado como función de la variable k real, procediéndose a evaluar su correspondiente transformada de Fourier. Todo este procedimiento lo presentamos en el complemento D. El resultado, indicado en (D-17), es el siguiente

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [T(k) - 1] \Phi(x, k) \exp(iky) dk = \sqrt{2\pi} K(x, y) + \quad (1-31) *$$

$$+ \{F(R)\}(x+y) + \int_x^{\infty} K(x, s) \{F(R)\}(y+s) ds \dots \text{ para } y \gg x$$

donde

la integral que aparece en el primer miembro de la igualdad (1-31) se evalúa a lo largo del eje k real, y para calcularla aplicaremos la usual técnica de trabajar en el plano complejo. Partimos de lo siguiente:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Gamma_R} [T(k) - 1] \Phi(x, k) \exp(iky) dk \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [T(k) - 1] \Phi(x, k) \exp(iky) dk + \quad (1-32)$$

$$+ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} T(k) - 1 \Phi(x, k) \exp(iky) dk$$

* El símbolo $\{F(R)\}(x+y)$ denota: la transformada de Fourier de la función R , evaluada en $(x+y)$. En este caso R es la función a la que se refiere (1-27), pero con el dominio restringido a k real. Aquí usamos $\{F(R)\}(y) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} R(k) \exp(iyk) dk$. (Otros autores prefieren partir de la definición $\{F(R)\}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} R(k) \exp(-iyk) dk$. Nótese el signo -).

donde Γ_R es una curva cerrada, según se indica en la fig.5
(C_R es una semicircunferencia de radio R),

Como $T(k) = \frac{1}{a(k)}$ y "a" es una función analítica en $\text{Im}k > 0$ que se anula en un número finito N de puntos $k = k_j$ situados a lo largo del eje imaginario, resulta que "T" tiene N polos.

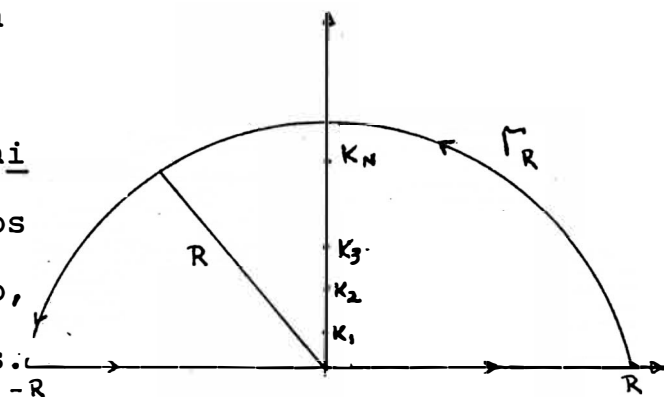


Fig. 5

$$T(k) \xrightarrow[k \rightarrow k_j]{} \infty, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (1-33)$$

La evaluación de las integrales que aparecen en (1-32) se vuelve, entonces, un poco laboriosa. El procedimiento lo presentamos en el complemento D. El resultado en (D-38) es el siguiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [T(k) - 1] \Phi(x, k) \exp(iyk) dk = \\ = -\sqrt{2\pi} \int_x^{\infty} K(x, s) \left\{ \sum_{j=1}^N d_j \exp[ik_j(y+s)] \right\} ds + \\ - \sqrt{2\pi} \sum_{j=1}^N d_j \exp[ik_j(x+y)] \end{aligned} \quad (1-34)$$

donde las constantes d_j son las definidas en (1-22), aunque (C-25) nos indica otra manera de calcularlas

$$d_j = \frac{b(k_j)}{i a'(k_j)} \quad k_j = i\eta_j, \quad \eta_j > 0 \quad (1-35) *$$

$$j = 1, 2, \dots, N.$$

Reemplazando (1-34) en (1-31) obtenemos

$$\left\{ \sum_{j=1}^N d_j \exp [ik_j (x+y)] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \{ \mathcal{F}(R) \} (x+y) \right\} +$$

$$+ \int_x^\infty K(x,s) \left\{ \sum_{j=1}^N d_j \exp [ik_j (y+s)] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \{ \mathcal{F}(R) \} (y+s) \right\} ds + K(x,y) = 0$$

para $\dots y > x$

Para simplificar, definimos $\Omega : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\Omega(u) = \sum_{j=1}^N d_j \exp(ik_j u) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(k) \exp(iuK) dk \quad (1-36)$$

con ella la expresión anterior toma la forma :

$$\Omega(x+y) + K(x,y) + \int_x^\infty K(x,s) \Omega(y+s) ds = 0 \quad (1-37)$$

para $y > x$

Esta ecuación recibe el nombre de Ecuación de Marchenko

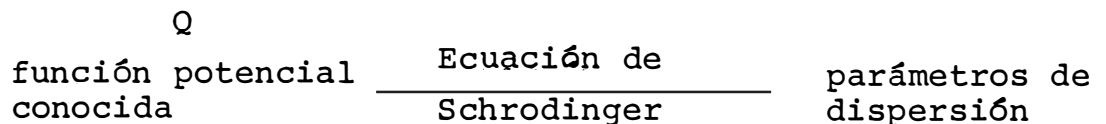
Nótese que para un problema dado, como el que se esquematiza en la fig. 4, en que no conocemos el potencial Q , todo lo que necesitamos para construir la ec. de Marchenko es determinar el coeficiente de reflexión $R(k)$ correspondiente

* El símbolo prima en el denominador indica derivada.

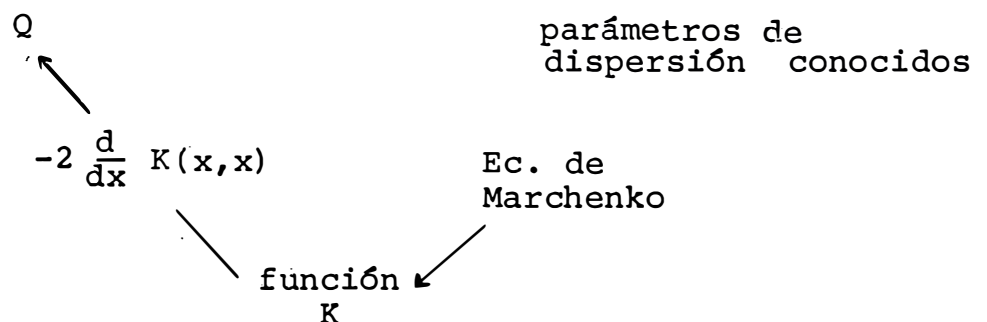
a cada energía $k^2 > 0$ de la onda incidente, así como las energías $k_j^2 = (i\eta_j)^2 < 0$ correspondientes a los estados ligados y las constantes de normalización d_j (según se indica en 1-36). Estas cantidades $R(k)$, $k \in \mathbb{R}$; η_j , d_j , $j = 1, 2, \dots, N$ son denominadas parámetros de dispersión. Al determinar la función K que soluciona (1-37), podemos determinar el potencial Q que dió lugar a tales parámetros de dispersión: $Q(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x)$, tal como lo indica (1-10). Tenemos, de este modo, un mecanismo de reconstruir el potencial Q a partir de sus parámetros de dispersión.

Las ideas vertidas en el presente capítulo pueden esquematizarse en la forma siguiente

PROBLEMA DIRECTO



PROBLEMA INVERSO



CAPITULO 2

PROBLEMAS NO-LINEALES Y EL METODO INVERSO A LA DISPERSION

1. INTRODUCCION

Es por nosotros conocido que los métodos de la física teórica han estado dominados por :

Ecuaciones lineales (Maxwell, Schrodinger)

Objetos matemáticos lineales (espacios vectoriales)

Métodos lineales (transformadas de Fourier, teoría de perturbaciones lineales)

Podríamos afirmar que, a veces , la interpretación de un fenómeno físico nos conduce a una ecuación diferencial no lineal, que al anular en ella la correspondiente parte no lineal, la ecuación diferencial lineal resultante nos describe satisfactoriamente, aunque en forma aproximada, el comportamiento del sistema físico en estudio. Aún más, en el caso que este procedimiento no fuera del todo aceptable, se procede a utilizar el método de perturbación, el cual consiste en construir soluciones del problema no lineal en base a las soluciones del correspondiente problema lineal.

Sin embargo, en varias ramas de la física se han encon-

trado fenómenos que están gobernados por ecuaciones diferenciales parciales no lineales cuya totalidad de propiedades no pueden lograr ser descritas por los métodos mencionados anteriormente.

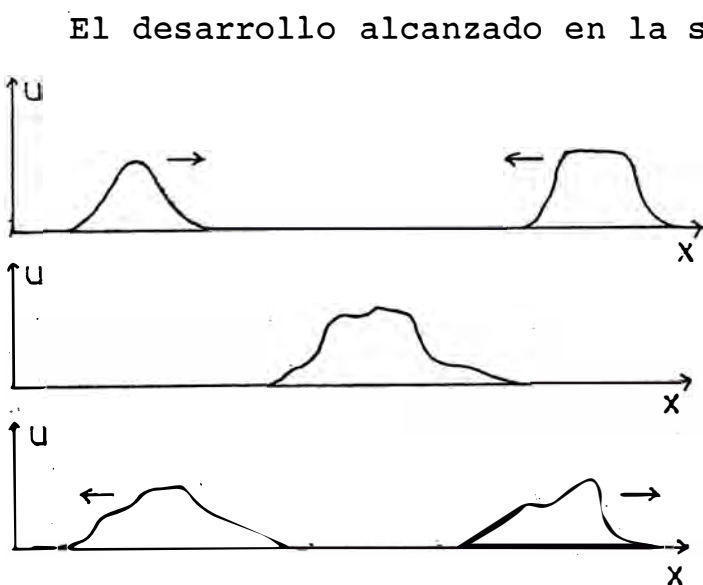


Fig. 1 Comportamiento posible en una interacción entre ondas no-lineales

lineales es reciente, y quizás el descubrimiento más significativo sea el referente a la interacción de ondas; expliquemos ésto. En los casos conocidos sucedía que cuando dos ondas no lineales (las llamamos así porque su comportamiento

está gobernado por una ecuación diferencial no lineal) interactuaban, ambas perdían su identidad luego de la interacción; y se pensó que siempre sucedería lo mismo. Estudios hechos en computadora descartaron esta idea; en un trabajo publicado en 1965 (ver ref. 6) Sabusky y Kruskal dan referencia de que ondas cuyo comportamiento está gobernado por la ecuación no lineal $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ recuperan el mismo perfil que presentan previa a la interacción, en virtud de tal característica a estas ondas las bautizan con el nom

* Conocida con el nombre de ec. de KdV

bre de SOLITONES.

Precisamente, es con el advenimiento de la computadora que los problemas no lineales empiezan a ser abordados. Varias de las ecuaciones diferenciales no lineales actualmente en estudio fueron planteadas hace varios años, pero la gran dificultad en su tratamiento analítico impidió un mayor avance. Podemos palpar en este hecho cómo el desarrollo de la física tiene un limitante en el lenguaje matemático del que dispone para formular sus modelos. El estudio de fenómenos nuevos en física da muchas veces un gran impulso al desarrollo de la matemática, en el presente caso, por ejemplo, las soluciones numéricas de ecuaciones no lineales obtenidas con la ayuda de las computadoras han permitido descubrir métodos analíticos. Uno de ellos, el cual utiliza el M.I.D. (estudiado en el capítulo 1), ha sido aplicado con éxito en varios casos importantes; su estudio es uno de los objetivos del presente trabajo.

La importancia de tal método radica en que permite solucionar exactamente problemas no lineales, sujetos a una condición inicial, usando métodos lineales. La mayoría de las veces ofrece solitones como solución (en el Capítulo 3 nos referiremos al por qué son importantes los solitones). Sin embargo el mecanismo de aplicación presenta variantes de una ecuación a otra, en este sentido debemos decir que

el M.I.D. no es una "fórmula" general para resolver problemas no lineales; cuando tenemos una ecuación no lineal por resolver hay en realidad dos problemas por delante:

Primero; Insertarlo en el esquema del M.I.D.

(Esto se traduce, como veremos luego, en asociarle una adecuada familia de operadores lineales; ¿Cómo son dichos operadores?, es algo que no siempre resulta del todo transparente).

Segundo: La aplicación en sí del M.I.D.

(de la que esperamos obtener solitones como solución)

En el presente capítulo abordaremos sólo el primero de los problemas que acabamos de mencionar. Desarrollamos el estudio de un esquema general que nos ha de permitir encarar un problema no lineal desde el punto de vista del M.I.D. Tales ideas las concretizamos luego en tres casos específicos: ec. de Korteweg-de Vries, ec. Modificada de Korteweg-de Vries, ec. de Schrodinger no lineal.

El segundo problema es más específico y presenta variantes en cada ecuación no lineal. Será en el capítulo 4, al resolver analíticamente la ec. de Korteweg-de Vries, que tendremos la oportunidad de ver como es que funciona el M.I.D.

2. EL M.I.D. COMO METODO DE SOLUCION DE PROBLEMAS NO LINEALES

2.1 Problema no lineal a resolver.-

Se desea solucionar la ecuación diferencial de la forma

$$u_t = F(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) ; \quad u: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \quad (2-1)$$

sujeta a la condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

donde u_0 es una función dada, $u_0: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

Por ejemplo, si $F(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = 6uu_x - u_{xxx}$ la expresión

(2-1) indica que vamos a resolver la ecuación de Korteweg-de

Vries con la cual trabajaron Zabusky y Kruskal; en caso

$F(u, u_x, u_{xx}, \dots) = iu_{xx} + 2i|u|^2 u$ se tiene la ecuación de

Schrodinger no lineal $u_{xx} + 2|u|^2 u + iu_t = 0$.

2.2 Generalización del M.I.D.

Hasta el momento el M.I.D. lo hemos circunscrito al opera-

dor lineal de Schrodinger. En efecto, dada una función po-

tencial Q definíamos el operador $H = -D^2 + \hat{Q}$, y el proble-

ma directo consistía en resolver un problema de valores pro-

prios de H , ello nos conducía a obtener los parámetros de

dispersión: $Q \stackrel{H}{\leftarrow} \{R(k), k_j, d_j\}$, el problema in-

verso consistía en recobrar el potencial Q a partir del co-

nocimiento de los parámetros de dispersión haciendo uso pa-

ra ello de la ecuación de Marchenko:

$$Q \xleftarrow{\text{ec. de Marchenko}} \{R(k), k_j, d_j\}$$

Sin embargo, esto podría hacerse extensivo, en principio, a cualquier operador lineal L (L actúa sobre un espacio de funciones cuyas características deben ser especificadas en cada caso particular). Hablando con un poco de generalidad, cabe plantear lo siguiente :

- o Que el PROBLEMA DIRECTO consista en resolver la ecuación de valores propios del operador L , a partir del cual se obtendrían ciertos parámetros de dispersión, que los indicaremos con el símbolo C

$$u \xrightarrow{L} C \quad (2-2a)$$

- o Para el PROBLEMA INVERSO se debe construir una ecuación, similar a la ec. de Marchenko, que permita recobrar la función "potencial" u a partir de los parámetros de dispersión.

$$u \xleftarrow{\quad} C \quad (2-2b)$$

2.3 Insertamos el problema no-lineal(2-1) en el esquema del M.I.D., indicado en (2-2a) y (2-2b)

Esto lo llevamos a cabo a través de los siguientes tres pasos:

a) Interpretaremos la solución buscada u , que es una función de dos variables, como una familia monoparamétrica de funciones ${}_{\tau}u$ de una variable.

u : función de 2 variables



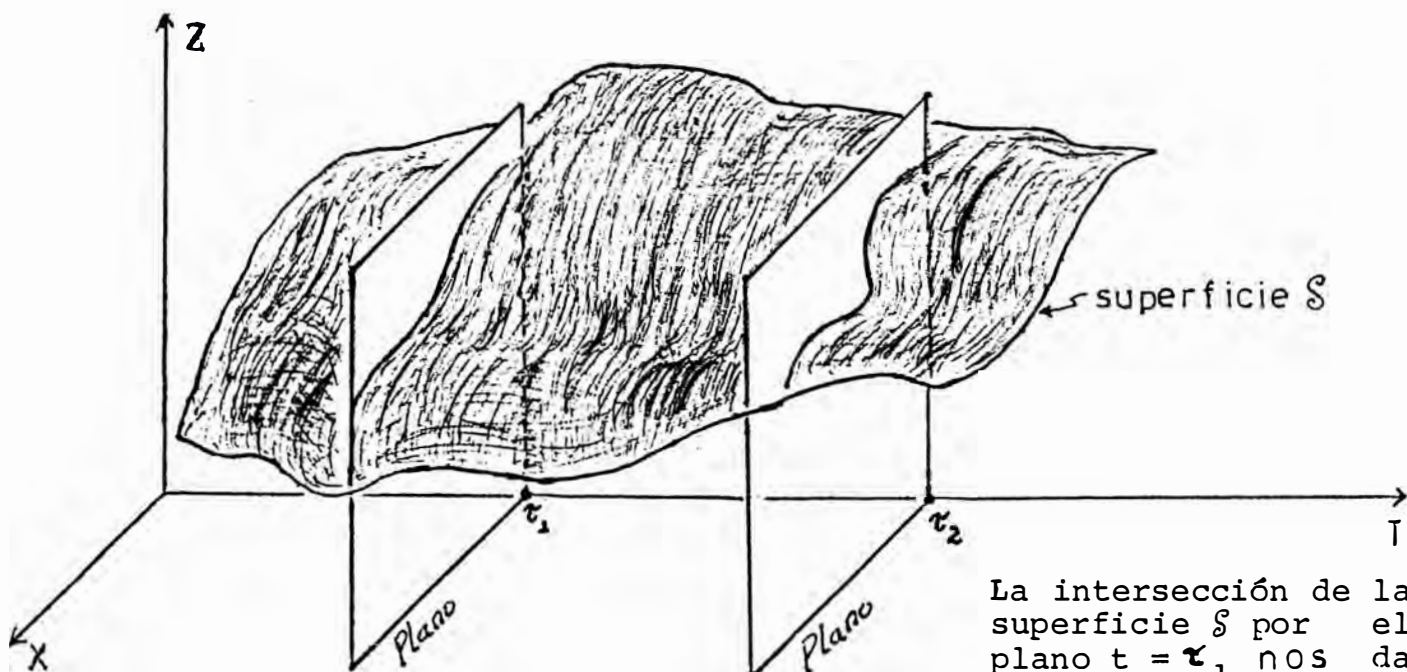
$\{ {}_{\tau}u \}$ familia monoparamétrica

$$u: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(x, t) \longmapsto u(x, t)$$

$${}_{\tau}u: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

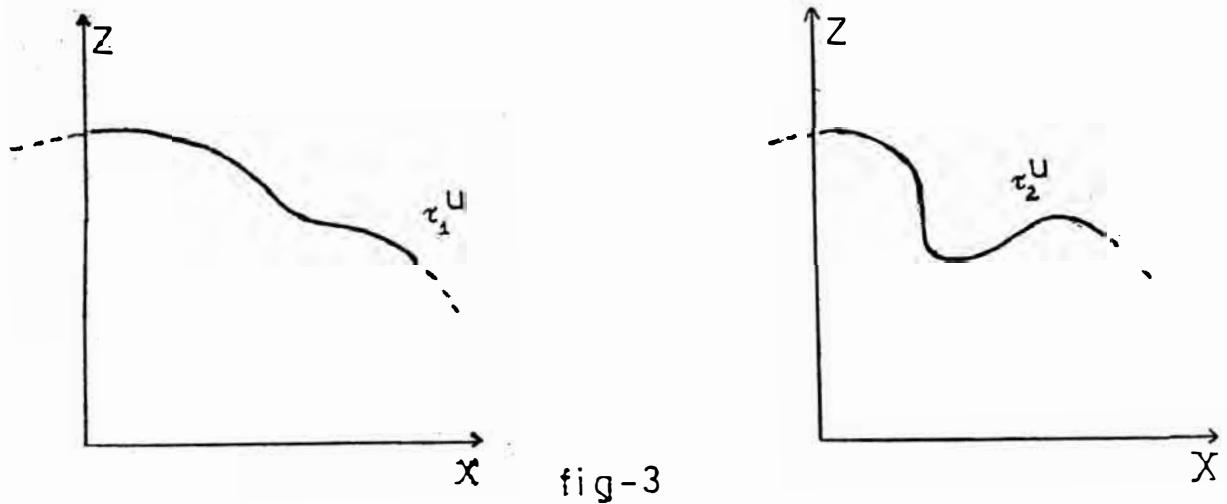
$$x \longmapsto {}_{\tau}u(x) = u(x, \tau)$$



La intersección de la superficie S por el plano $t = \tau_1$ nos da la gráfica de la función ${}_{\tau_1}u$.

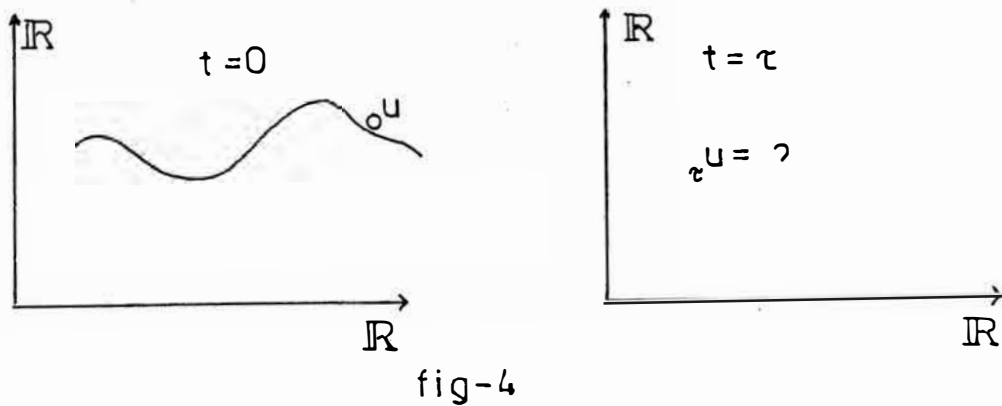
$$S = \{ (x, t, z) \in \mathbb{R}^3 / z = u(x, t) \}$$

fig-2



b) Buscamos soluciones "tomando fotografías"

Básicamente el problema 2-1 consiste en averiguar cómo es el perfil de la solución en cualquier instante $t = \tau$, si se conoce el que tiene en el instante $t = 0$



c) Hablando con cierta generalidad consideramos ahora que a cada función u le hemos asociado cierto operador lineal $L(\tau)$ *, y con ellos formamos una familia monoparamétrica $\mathcal{L} = \{ L(\tau), \tau \in \mathbb{R} \}$.

* La relación entre $L(\tau)$ y el problema 2-1 se podrá apreciar en la figura 5.

Asumimos que el M.I.D. correspondiente a \mathcal{L} está resuelto en el sentido indicado en 2-2a y 2-2b, es decir podemos obtener ${}_{\tau}u$ a partir de $C(\tau)$ y viceversa.

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\text{problema directo}} & \\
 {}_{\tau}u & \xrightarrow{L(\tau)} & C(\tau) \quad , \quad \text{para cada } \tau \in \mathbb{R} \quad (2-3) \\
 & \xleftarrow{\text{problema inverso}} &
 \end{array}$$

2.4 Procedimiento para solucionar el problema no-lineal 2-1

Como deseamos hallar u a partir de ${}_0u$, lo expresado en (2-3) sugiere plantear el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccc}
 & L(0) & \\
 {}_0u & \xrightarrow{\quad} & C(0) \\
 & & \downarrow \\
 & L(\tau) & \\
 {}_{\tau}u & \xleftarrow{\quad} & C(\tau)
 \end{array}$$

el cual permite visualizar el siguiente procedimiento

- ①. Conocida la función ${}_0u$, se procede a determinar los parámetros de dispersión $C(0)$
- ②. Averiguar cómo obtener $C(\tau)$ a partir de $C(0)$ (2-4)
- ③. Aplicando el método inverso, obtener ${}_{\tau}u$ a partir de los parámetros de dispersión $C(\tau)$

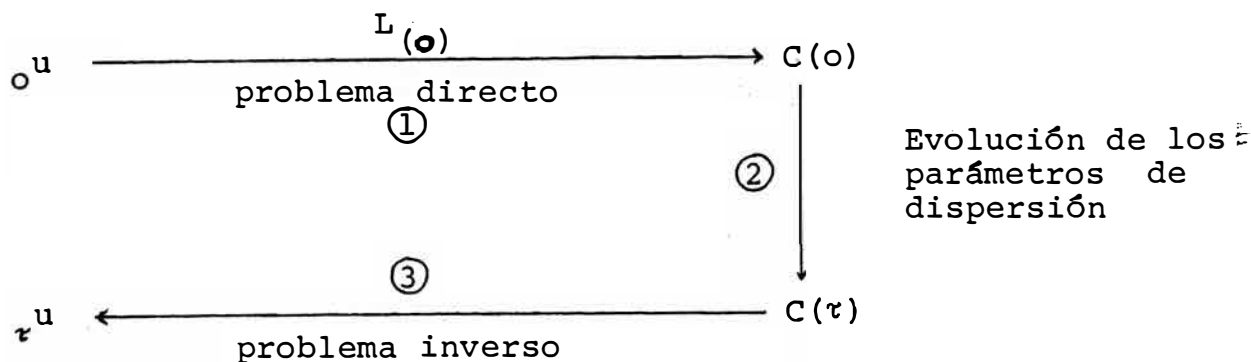


Fig. 5 Procedimiento sugerido en (2-4) para resolver el problema no lineal (2-1)

2.5 Lo que necesitamos para llevar a cabo el planteamiento (2-4)

El esquema de la figura 5 nos plantea tres tareas:

- Asociar una familia de operadores lineales $\{L(\tau)\}$ a la ecuación 2-1
- Resolver el problema inverso (en el sentido indicado en 2-2a y 2-2b)
- Determinar como evolucionan los parámetros de dispersión

La primera de ellas podemos abordarla con cierta generalidad y es lo que nos proponemos hacer en las secciones siguientes. Las otras dos son más específicas y exigen conocer explícitamente la familia $\{L(\tau)\}$; será en el Capítulo 4, al resolver la ecuación de KdV, que podremos apreciar con detalle en que consisten.

3. COMO ASOCIAR A LA ECUACION NO LINEAL (2-1)

UNA FAMILIA DE OPERADORES LINEALES

3.1 Criterio a seguir

La idea es tomada del trabajo de Gardner, Greene, Kruskal y Miura 1967 (ver Ref. 7) quienes aplicaron por primera vez el M.I.D. para resolver un problema no lineal. Considerando la familia monoparamétrica de operadores

$$\mathcal{L} = \left\{ L_{(\tau)} = -D^2 + \hat{u}_{\tau} \quad \tau \in \mathbb{R} \right\} \quad (2-5)$$

donde $_{\tau}u$ es una función real $_{\tau}u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

ellos encuentran que si la función $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, con $u(x, \tau) = _{\tau}u(x)$, satisface la ecuación :

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

entonces cada uno de los operadores $L_{(\tau)}$ tienen los mismos valores propios.

Este interesante resultado lo hacemos extensivo al caso general

Queremos establecer un mecanismo que nos indique como construir una familia de operadores lineales $\{L_{(\tau)}, \tau \in \mathbb{R}\}$ tal que los valores propios sean invariantes con respecto al parámetro τ .

(2-6)

Es decir, en la ecuación $L_{(\tau)} Y_{(\tau)} = \lambda Y_{(\tau)}$ suceda que al variar τ cambie tanto el operador como la función propia, mas no el valor propio.

En el contexto de los problemas no lineales de la forma (2-1) y teniendo en cuenta la interpretación de la solución $u: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ como una familia monoparamétrica de funciones ${}_{\tau}u: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ con $u(x, \tau) = {}_{\tau}u(x)$, se pueden presentar dos casos:

- i) Dada una ecuación no lineal $u_t = F(u, u_x, u_{xx}, \dots)$
¿Cómo determinar (cómo construir) su correspondiente familia de operadores lineales $\mathcal{L} = \{ L_{(\tau)}, \tau \in \mathbb{R} \}$
en la que los valores propios sean invariantes con respecto al parámetro τ ? , ó
- ii) Dada una familia de operadores lineales $\mathcal{L} = \{ L_{(\tau)}, \tau \in \mathbb{R} \}$
¿Qué ecuación del tipo $u_t = F(u, u_x, u_{xx}, \dots)$ debe satisfacer la función u para que los valores propios de los elementos de \mathcal{L} sean invariantes con respecto a τ ? (2-7)

Aquí el parámetro τ hace referencia a la función ${}_{\tau}u$ que aparece explícitamente en la definición de $L_{(\tau)}$ (la expresión 2-5 nos dá un ejemplo de esto)

3.2 ¿Qué es una familia de operadores equivalentes?

El criterio expuesto en 2-6 exige desarrollar el concepto de operadores equivalentes.

Sea \mathcal{L} una familia monoparamétrica

$$\mathcal{L} = \left\{ L_{(\tau)} : \xi \longrightarrow \xi, \text{ operador lineal, } \tau \in \mathbb{R} \right\}$$

(por ahora es suficiente considerar que el conjunto ξ de funciones, tiene una estructura de espacio vectorial).

Definición :

\mathcal{L} es una familia de operadores equivalentes



existe $\left\{ U_{(\tau)} : \xi \longrightarrow \xi, \text{ operador lineal inversible} \right\}$

tal que $L_{(\tau)} = U_{(\tau)} L_{(0)} U_{(\tau)}^{-1}, \forall \tau \in \mathbb{R} \quad (2-8)$

donde $U_{(0)} = \mathbf{I}$ (operador identidad)

Denotemos con $Y_{(0, \alpha)}$ la función propia del operador $L_{(0)}$ correspondiente al valor propio α . Aplicando la def. (2-8) resulta :

$$L_{(0)} Y_{(0, \alpha)} = \alpha Y_{(0, \alpha)} \implies L_{(\tau)} (U_{(\tau)} Y_{(0, \alpha)}) = \alpha (U_{(\tau)} Y_{(0, \alpha)}) \quad (2-9)$$

Este resultado indica que, independiente del valor que tome τ , la función $U_{(\tau)} Y_{(0, \alpha)}$ es función propia de $L_{(\tau)}$ y el valor propio es el mismo número α ; esta propiedad es la requerida en 2-6.

Así, dado el problema planteado en (2-1), nuestra tarea consiste en averiguar como construir la familia de operadores equivalentes que haga posible llevar a cabo el esquema de la fig. 5. (2-10)

Previamente, complementemos el resultado (2-9). Aplicando la definición (2-8) obtenemos :

$$L_{(\tau)} Y_{(\tau, \beta)} = \beta Y_{(\tau, \beta)} \Rightarrow L_{(0)} (U_{(\tau)}^{-1} Y_{(\tau, \beta)}) = \beta (U_{(\tau)}^{-1} Y_{(\tau, \beta)}) \quad (2-11)$$

Los resultados (2-9) y (2-11) pueden resumirse en el siguiente diagrama :

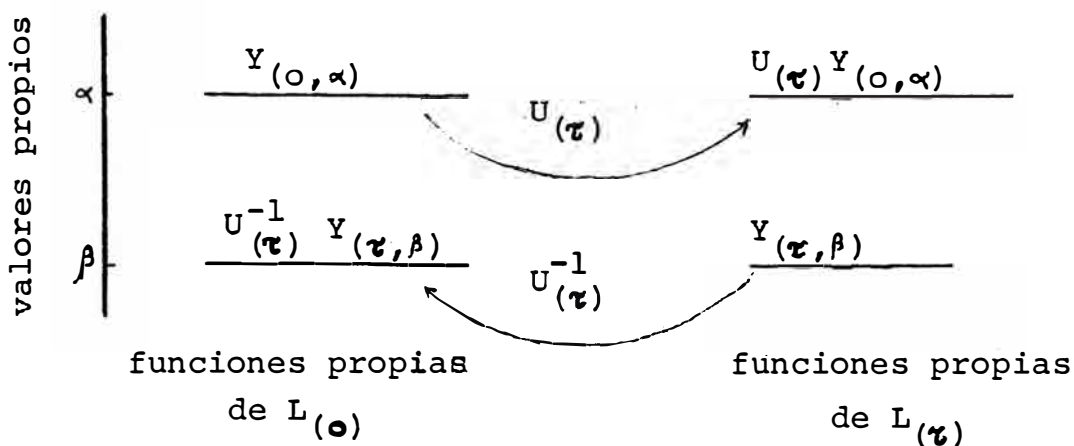


Fig. 6 Forma en que evolucionan las funciones propias con respecto al parámetro τ .

Forma de identificar los operadores equivalentes.-

Alternativamente a la def.(2-8) y a la forma de presentar, en la Fig. 6, cómo evolucionan las funciones propias, haremos uso de los siguientes resultados:

$\{L(\tau)\}$ es una familia de operadores equivalentes \Leftrightarrow Existe una familia de operadores $\{A(\tau)\}$ con la cual se satisface :

$$\dot{L}(\tau) + [L(\tau), A(\tau)] = 0 \quad (2-12) *$$

Las funciones propias $Y(\tau, \alpha)$ evolucionan de acuerdo a la ecuación :

$$\dot{Y}(\tau, \alpha) = A(\tau) Y(\tau, \alpha) \quad (2-13)$$

(la demostración de(2-12) y(2-13) se da al final del capítulo , Ver Anexo 1)

3.3 Esquema para asociar una familia de operadores equivalentes a una ecuación no-lineal

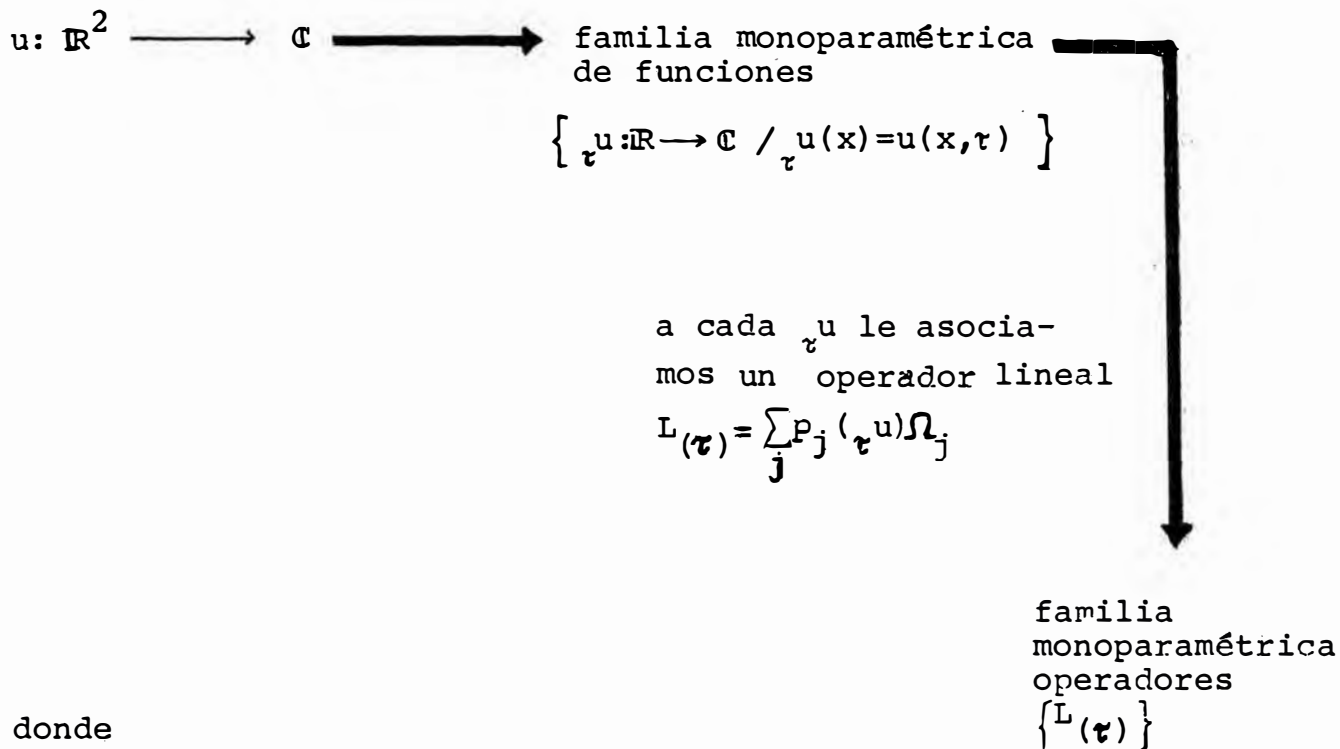
Tal como se mencionó en(2-7) pueden presentarse 2 casos:

3.3-1) Se tiene la ecuación no lineal $u_t = F(u, u_x, u_{xx} \dots)$,

$u: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, y deseamos asociarle una familia de

* $[L, A] = LA - AL$ y, en $\dot{L}(\tau)$, el punto indica derivación con respecto a τ .

operadores equivalentes. Lo intentaremos bajo el siguiente esquema:



donde

$\Omega_j: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ es un operador lineal a ser determinado

$p_j(\tau u): \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, operador lineal en cuya definición aparece τu explícitamente (en particular puede presentar la forma de un polinomio).

La idea, sugerida por Lax (Ref.8), es el elegir los p_j , Ω_j de tal manera que para alguna familia de operadores $\{A(\tau)\}$ se cumpla $L(\tau) + [L(\tau), A(\tau)] = u_t - F(u, u_x, u_{xx}, \dots)$

Si esto fuera posible, se cumpliría que

$$\left\{ \begin{array}{l} u \text{ satisface la ec.} \\ u_t = F(u, u_x, u_{xx}, \dots) \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{L}(\tau) + [L(\tau), A(\tau)] = 0$$

y, de acuerdo a (2-12), $\{L(\tau)\}$ será una familia de operadores equivalentes.

3.3-2) En este caso se tiene una familia de operadores $L(\tau)$, en la que el subíndice τ hace referencia a que en la definición aparece la función $u: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ explícitamente, y queremos averiguar: que ecuación debe satisfacer $u: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ (siendo $u(x, \tau) = \tau u(x)$) para que $\{L(\tau)\}$ sea una familia de operadores equivalentes.

El procedimiento a seguir es buscar una familia de operadores $\{A(\tau)\}$, de tal manera que la ec. $\dot{L}(\tau) + [L(\tau), A(\tau)] = 0$ adopte la forma de una ec. para u .

A las familias de operadores $\{L(\tau)\}, \{A(\tau)\}$ se las identifica con el nombre de "par de Lax".

4. APLICACIONES

4.1 El Operador de Schrodinger y la Ecuación de KdV*.

El ejemplo que vamos a mostrar aquí, corresponde al caso que hemos mencionado en la sección 3.3-2

Sea $\{ \tau u: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tau \in \mathbb{R} \}$ una familia monoparamétrica de funciones

En base a ella definimos una familia de operadores lineales

$$\mathcal{H} = \left\{ H_{(\tau)}: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \mid H_{(\tau)} = -D^2 + \tau u \right\} \quad (2-14)$$

donde

$\mathcal{E} = \{ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ función continua, } Df \text{ continua} \}$ el cual, con las operaciones usuales de suma de funciones y producto con un escalar, forma una estructura de espacio vectorial.

\hat{u}_{τ} es un operador multiplicativo: $\hat{u}_{\tau}(f) = \tau u \cdot f$

Consideremos ahora la función $u: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} /$

$$u(x, \tau) = \tau u(x) \quad (2-15)$$

* En el Cap. 3 se detallan aspectos del rol desempeñado por la ec. de KdV, $u_x - 6uu_x + u_{xxx} = 0$, en el desarrollo de la física no lineal.

Pregunta

¿Qué ecuación debe satisfacer la función $u: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ para que \mathcal{H} sea una familia de operadores equivalentes?

Para responder esta pregunta nos guiaremos del resultado (2-12).

A partir de (2-14) y (2-15) se obtiene $\dot{H}_{(\tau)} f(x) = u_t(x, \tau) \cdot f(x)$ o sea

$$\dot{H}_{(\tau)} f = \tau(u_t) \cdot f \tag{2-16}^*$$

A fin de simplificar la notación, en adelante escribiremos

$$H(\tau) = u_t \tag{2-17}$$

pero queda sobreentendido que en (2-16) está lo que se desea indicar. En (2-17) u_t debe ser considerado como un operador multiplicativo. Luego

$$\dot{H}(\tau) + [H(\tau), A(\tau)] = u_t + [-D^2 + \tau u, A(\tau)] \tag{2-18}$$

Ahora, debemos encontrar una familia de operadores $A(\tau)$ con la cual al corchete que aparece en el segundo miembro de (2-18) se convierta en un operador multiplicativo, donde intervengan las derivadas parciales de u .

* Como es usual, para $u: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en (2-15), u_t denota la función derivada parcial de u con respecto a la segunda variable. Además

$$\tau(u_t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tau(u_t)(x) = u_t(x, \tau)$$

o. Ensayemos con $A(\tau) = aD \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$ (a cte.); al reemplazar en (2-18) obtenemos

$$\dot{H}(\tau) + [H(\tau), aD] = u_t - au_x \quad (2-19)$$

Exigiendo que u sea solución de la ecuación

$$u_t - au_x = 0 \quad (2-20)$$

en(2-19) tendremos

$$\dot{H}(\tau) + [H(\tau), aD] = 0$$

y así \mathcal{H} , dado en (2-14), es una familia de operadores equivalentes.

o. La elección hecha para u, a través de (2-20), no es la única posible. En efecto, consideremos ahora

$$A(\tau) = a(D^3 + bD + Db) \quad (2-21)$$

donde $b = b(x,t)$ es una función por elegir y a es una constante

$$\begin{aligned} \dot{H}(\tau) + [H(\tau), A(\tau)] = & u_t - a(3u_x + 4b_x)D^2 - a(3u_{xx} + 4b_{xxx})D + \\ & -a(u_{xxx} + 2bu_x + b_{xxx}) \end{aligned}$$

A fin de convertir el segundo miembro de esta igualdad en un operador multiplicativo, elegimos

$$b = -\frac{3}{4} u$$

con lo cual

$$\dot{H}(\tau) + [H(\tau), A(\tau)] = u_t - \frac{a}{4} (u_{xxx} - 6uu_x)$$

Eligiendo $a = -4$ resulta

$$\dot{H}(\tau) + [H(\tau), A(\tau)] = u_t - 6uu_x + u_{xxx}$$

Luego

Si $u: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface la ec. de KdV: $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$

entonces

• $\{ H(\tau) = -D^2 + \tau u, \tau \in \mathbb{R} \}$ es una familia de operadores equivalentes

donde $\tau u(x) = u(x, \tau)$

• Las funciones propias satisfacen $\dot{Y}(\tau, \alpha) = A(\tau)Y(\tau, \alpha)$

donde $A(\tau) = -4D^3 + 3uD + 3Du$ (2-22)

4.2 Ecuación modificada de KdV

Se desea asociar una familia de operadores equivalentes a ecuación no-lineal

$$u_t - 6u^2u_x + u_{xxx} = 0 \quad \text{Ec. MKdV} \quad (2-23)^*$$

Puesto que el operador de Schrodinger $H(\tau) = -D^2 + \tau u$ está asociado a la ecuación de KdV $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$, cabe pensar que, introduciendo una modificación en $H(\tau)$ podamos encontrar el operador a ser asociado a la ecuación MKdV. Esta idea adquiere mayor claridad si presentamos la ecuación de Schrodinger en 2 componentes.

En efecto, notemos que la ec. de Schrodinger

$$HY = k^2Y, \quad H = -D^2 + \hat{Q}$$

con el cambio de variable

$$f =iky - DY, \quad g = -y$$

se convierte en una ecuación de valores propios para H

$$H \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = ik \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D + \begin{pmatrix} 0 & Q \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La forma que ha adoptado. H sugiere que la ec. MKdV sea asociada a una familia de operadores del tipo:

* La forma como se ha planteado el problema corresponde al caso que hemos mencionado en la sección 3.3-1

$$L(\tau) = B D + U \quad (2-24)$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & \tau u \\ \tau u & 0 \end{pmatrix}$$

β_1, β_2 : constantes a ser determinadas

$$\tau u(x) = u(x, \tau)$$

Ahora tenemos que construir una familia $\{A(\tau)\}$ con la que se verifique $L(\tau) + [L(\tau), A(\tau)] = 0$

$$\text{Ensayemos con } A = a D^3 + P D + R \quad (2-25)$$

$$\text{donde } P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix}, \quad a = \text{cte}$$

$p_j = p_j(x, t)$, $r_j = r_j(x, t)$; $j = 1, 2, 3, 4$ funciones a determinar

Con (2-24) y (2-25) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{L}(\tau) + [L(\tau), A(\tau)] &= U_t + [B D + U, a D^3 + P D + R] \\ &= \{ [B, P] - 3a U_x \} D^2 + \\ &\quad \{ [B, R] + [U, P] + B P_x - 3a U_{xx} \} D + \\ &\quad \left\{ U_t + [U, R] + B R_x - a U_{xxx} - P U_x \right\} \end{aligned} \quad (2-26)$$

$\{L(\mathcal{L})\}$ verificará la ecuación de operadores equivalentes si las cantidades entre llaves se anulan. Es esto entonces lo que exigiremos

$$U_t + [U, R] + BR_x - a U_{xxx} - P U_x = 0 \text{ implica}$$

$$\beta_1 (r_1)_x + \beta_2 (r_4)_x = 0$$

$$- \frac{3a}{\beta_2 - \beta_1} (u_x)^2 + \frac{\beta_2 (r_4)_x - \beta_1 (r_1)_x}{2} - (r_3 - r_2) u = 0$$

$$-u_x (p_4 - p_1) + \beta_2 (r_3)_x - \beta_1 (r_2)_x - u (r_4 - r_1) = 0$$

$$u_t - \frac{p_4 + p_1}{2} u_x - a u_{xxx} + \frac{\beta_1 (r_2)_x + \beta_2 (r_3)_x}{2} = 0 \dots (i)$$

Al igualar a cero las cantidades $[B, P] - 3a U_x$, $[B, R] + [U, P] + BR_x - 3a U_{xx}$ se obtienen relaciones las cuales se combinan con el único fin que (i) tome la forma de la ec. MKdV (las operaciones las mostramos al final del capítulo Ver Anexo 2).. La elección adecuada resulta ser

$$p_1 = p_4 = \mp 6u^2 ; \beta_1 = -\beta_2 = -1; r_2 = -r_3 = 3u_{xx} ; a = -4$$

y así en (2-24) y (2-25) tenemos :

$$\left| \begin{array}{l} B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \pm 6u^2 & 6u_x \\ -6u_x & \mp 6u^2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -6uu_x & 3u_{xx} \\ -3u_{xx} & -6uu_x \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Si u satisface la ecuación $u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0$,
se cumple:

$$\left\{ L_{(\tau)} = \mathbb{B}D + \begin{pmatrix} 0 & \tau u \\ \tau u & 0 \end{pmatrix}, \text{ tal que } \tau u(x) = u(x, \tau) \right\} \text{ es}$$

una familia de operadores equivalentes.

Además

$$Y = AY, \quad A = -4D^3 + PD + R$$

Para $Y_{(\tau)}$, función propia de $L_{(\tau)}$

(2-27)

4.3 Ecuación de Schrodinger no-lineal.

$$u_{xx} + \gamma |u|^2 u + iu_t = 0, \quad \gamma \text{ cte} \quad (2-28)$$

$u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$

Verifiquemos la utilidad del operador definido en (2-24)

Buscamos asociar a la ecuación no-lineal de Schrodinger una familia de operadores de la forma

$$L = \mathbb{B}D + U \quad (2-29)^{(1)}$$

donde:

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & \tau u^* \\ \tau u & 0 \end{pmatrix}$$

β_1, β_2 constantes a determinar

(1) τu^* denota al conjugado complejo de τu

Buscamos una familia $\{A_{(\tau)}\}$ con la que se satisfaga la ecuación de operadores equivalentes $\dot{L}_{(\tau)} + [L_{(\tau)}, A_{(\tau)}] = 0$

En la sección anterior queríamos arribar a una ecuación de 3er orden $u_t - 6uu^2 + u_{xxx} = 0$ y se eligió $A = aD^3 + \dots$; ahora nuestra ecuación es de segundo orden y lo indicado es buscar A de la forma

$$A = aD^2 + R \quad (2-30)$$

donde

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix}, \quad a = \text{cte}$$

$r_j = r_j(x, t)$ $j = 1, 2, 3, 4$ funciones a determinar

Con (2-29) y (2-30) se obtiene

$$L_{(\tau)} + [L_{(\tau)}, A_{(\tau)}] = \left\{ -2aU + [B, R] \right\} D + \left\{ U_t + BR_x + [U, R] - aU_{xx} \right\} \quad (2-31)$$

Exigimos que las cantidades que aparecen entre llaves se anulen, lo cual nos conduce, luego de ciertas operaciones⁽¹⁾, a

$$iu_t + -ia \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} u_{xx} + i(r_1) \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2} u = 0 \quad (2-32)$$

(1) Ver anexo 3 al final del capítulo

$$\beta_1 r_1 + \beta_2 r_4 = 0 \quad ; \quad r_2 = \frac{2a}{\beta_1 - \beta_2} u_x^* \quad ; \quad r_3 = -\frac{2a}{\beta_1 - \beta_2} u_x \quad (2-33)$$

Para que (2-32) tome la forma de la ec.(2-22) debemos exigir

$$-ia \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 - 2} = 1 \quad , \quad ir_1 \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = \nu |u|^2 \quad (2-34)$$

Si expresamos al parámetro "a" en la forma $a = ip$ ($p = \text{cte}$) entonces la relación (2-34) indica $(1 + p) \beta_2 = (1 - p) \beta_1$, pudiendo elegir

$$a = ip \quad , \quad \beta_1 = (1 + p)i \quad , \quad \beta_2 = (1 - p)i \quad p \neq 1 \quad (2-35)$$

con los cuales en(2-33) se obtiene

$$r_1 = -i \frac{1-p}{2} \nu |u|^2 \quad r_2 = u_x \quad (2-36)$$

$$r_3 = -u_x \quad r_4 = i \frac{(1+p)}{2} \nu |u|^2$$

donde el parámetro p es libre de elegirse; suele fijarse su valor a través de la igualdad $\nu = \frac{2}{1 - p^2}$. Con esta elección y las que se indican en (2-34) (2-35) y (2-36) se tiene el siguiente resultado:

$$\left| \text{Con } \mathbb{B} = i \begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix} ; \mathbb{R} = \begin{pmatrix} -i \frac{|u|^2}{1+p} & u_x^* \\ -u_x & i \frac{|u|^2}{1-p} \end{pmatrix} ; \nu = \frac{2}{1 - p^2} \right.$$

donde u satisface la ecuación $u_{xx} + \nu |u|^2 u + i u_t = 0$

se cumple

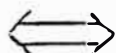
o $\left\{ L_{(\tau)} = B D + \begin{pmatrix} 0 & \tau u^* \\ \tau u & 0 \end{pmatrix}, \tau \in \mathbb{R} \right\}$ es una familia de operadores equivalentes

o Las funciones propias evolucionan de acuerdo a la ecuación

$$\dot{Y} = AY, \quad A = i p D^2 + R \quad (2-37)$$

ANEXO 1

• $\{L(\tau)\}$ es una familia de operadores equivalentes



Existe una familia de operadores $\{A(\tau)\}$ con la cual se satisface

$$\dot{L}(\tau) + [L(\tau), A(\tau)] = 0$$

Demostración

(\Rightarrow) Por hipótesis existe $\{U(\tau)\}$ y se cumple $L(\tau) = U(\tau) L(0) U(\tau)^{-1}$

$$\text{Derivando } \dot{L}(\tau) = \dot{U}(\tau) L(0) U(\tau)^{-1} + U(\tau) L(0) (U(\tau)^{-1})'$$

$$\text{como } U(\tau) U(\tau)^{-1} = I, \text{ entonces } (U(\tau)^{-1})' = -U(\tau)^{-1} \dot{U}(\tau) U(\tau)^{-1}$$

$$\dot{L}(\tau) = \dot{U}(\tau) U(\tau)^{-1} L(\tau) - L(\tau) \dot{U}(\tau) U(\tau)^{-1}$$

$$= \left[\dot{U}(\tau) U(\tau)^{-1}, L(\tau) \right]$$

por lo tanto, con $A(\tau) = \dot{U}(\tau) U(\tau)^{-1}$ se cumple

$$\dot{L}(\tau) + [L(\tau), A(\tau)] = 0$$

(\Leftarrow) Por hipótesis existe $\{A(\tau)\}$ con la cual se cumple

$$\dot{L}(\tau) + L(\tau) A(\tau) - A(\tau) L(\tau) = 0 \quad (i)$$

Formamos la familia $\{U(\tau)\}$ a partir de las soluciones de la ecuación*

* No haremos hincapié en las condiciones de existencia y unidad de la solución a esta ecuación de operadores.

$$\dot{U}(\tau) = A(\tau) U(\tau), \quad U(0) = I$$

Multiplicamos por $U(\tau)$ en (i) (por la derecha)

$$\dot{L}(\tau) U(\tau) + L(\tau) \dot{U}(\tau) - A(\tau) L(\tau) U(\tau) = 0$$

$$\left(L(\tau) U(\tau) \right)' - A(\tau) \left(L(\tau) U(\tau) \right) = 0$$

Multiplicamos por $U^{-1}(\tau)$ (por la izquierda) y reemplazamos $A(\tau) = \dot{U}(\tau) U^{-1}(\tau)$

$$U^{-1}(\tau) \left(L(\tau) U(\tau) \right)' - U^{-1}(\tau) \dot{U}(\tau) U^{-1}(\tau) \left(L(\tau) U(\tau) \right) = 0$$

$$U(\tau) U^{-1}(\tau) = I \Rightarrow U^{-1}(\tau) = -U^{-1}(\tau) \dot{U}(\tau) U^{-1}(\tau)$$

$$U^{-1}(\tau) \left(L(\tau) U(\tau) \right)' + \left(U^{-1}(\tau) \right)' \left(L(\tau) U(\tau) \right) = 0$$

$$\left(U^{-1}(\tau) L(\tau) U(\tau) \right)' = 0, \quad U^{-1}(\tau) L(\tau) U(\tau) = \text{cte}$$

$$U(0) = I \Rightarrow L(\tau) = U(\tau) L(0) U^{-1}(\tau)$$

o De (2-9): $Y(0)$ es función propia de $L(0)$ y $\left(U(\tau) Y(0) \right)$ lo será de $L(\tau)$

$$\left(U(\tau) Y(0) \right)' = \dot{U}(\tau) Y(0) = A(\tau) U(\tau) Y(0)$$

usando $Y(\tau) = U(\tau) Y(0)$, se cumple

$$\dot{Y}(\tau) = A(\tau) Y(\tau)$$

ANEXO 2

En(2-26), exigiendo $[B, P] = 3a U_x$ se obtiene

$$\begin{pmatrix} 0 & -(\beta_2 - \beta_1) p_2 \\ (\beta_2 - \beta_1) p_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3a u_x \\ 3a u_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_2 = - \frac{3a u_x}{\beta_2 - \beta_3} \quad p_3 = - p_2 \quad (i)$$

En(2-26) exigiendo $[B, R] + [U, P] + BP_x - 3a U_{xx} =$

se obtiene

$$\left. \begin{aligned} p_{1x} &= - \frac{6a}{\beta_1 (\beta_2 - \beta_1)} u u_x \\ p_{4x} &= \frac{6a}{\beta_2 (\beta_2 - \beta_1)} u u_x \\ (\beta_2 - \beta_1) (\beta_3 - \beta_2) &= 3a u_{xx} \\ (\beta_2 - \beta_1) (r_3 + r_2) - 2(p_4 - p_1) u &= -3a \frac{\beta_2 + \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} u_{xx} \end{aligned} \right| (ii)$$

En (2-26) exigimos $U_t + [U, R] + BR - a U_{xxx} - P U_x = 0$

y combinando con los resultados dados en (i), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \beta_1(r_1)_x + \beta_2(r_4)_x = 0 \\
 & - \frac{3a}{\beta_2 - \beta_1} (u_x)^2 + \frac{\beta_2(r_4)_x - \beta_1(r_1)_x}{2} - u(r_3 - r_2) = 0 \quad \text{(iii)} \\
 & - u_x (p_4 - p_1) + \beta_2(r_3)_x - \beta_1(r_2)_x - 2u(r_4 - r_1) = 0 \\
 & - u_x \frac{p_4 + p_1}{2} - au_{xxx} + \frac{(\beta_1 r_2 + \beta_2 r_3)_x}{2}
 \end{aligned}$$

En (iii) aparece nuestra ecuación de interés, y los pasos a dar están encaminados a darle la forma de la ec. MKdV.

Nótese la conveniencia de elegir $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 1$ para obtener $\frac{(\beta_1 r_2 + \beta_2 r_3)_x}{2} = \frac{(r_3 - r_2)_x}{2}$ y así aprovechar

el valor $(r_3 - r_2)$ que aparece en (ii)

Eligiendo $\beta_2 = 1$, $\beta_1 = -1$ en (i), (ii), (iii), respectivamente se obtiene

$$p_2 = -\frac{3}{2} au_x \quad ; \quad p_3 = \frac{3}{2} au_x \quad \dots \quad \text{(iv)}$$

$$(p_3)_x = \left(\frac{3}{2} au^2\right)_x \quad , \quad (p_4)_x = \left(\frac{3}{2} au^2\right)_x$$

$$(r_3 - r_2) = \frac{3}{2} a u_{xx} \quad \text{(v)}$$

$$2(r_3 + r_2) - 2u(p_4 - p_1) = 0$$

$$\begin{aligned}
 (r_4 - r_1)_x &= 0 \\
 -\frac{3}{2} a(u_x)^2 + \frac{(r_4)_x + (r_1)_x}{2} - (r_3 - r_2) u &= 0 \\
 -u_x(p_4 - p_1) + (r_3)_x + (r_2)_x - 2(r_4 - r_1) u &= 0 \\
 -u_x \frac{p_4 + p_1}{2} - au_{xxx} + \frac{(r_3 - r_2)_x}{2} + u_t &= 0
 \end{aligned}
 \tag{vi}$$

En (v) podemos elegir $p_1 = p_4 = \frac{3}{2} au^2$, cumpliendo entonces que $r_2 + r_3 = 0$. Como resultado, (v) se transforma en

$$p_1 = p_4 = \frac{3}{2} au^2 ; r_2 = -\frac{3}{4} au_{xx} ; r_3 = \frac{3}{4} au_{xx} \tag{vii}$$

Reemplazando (vii) en (vi)

$$\begin{aligned}
 r_4 &= r_3 \\
 -\frac{3}{2} a(u_x)^2 + (r_1)_x - \frac{3}{2} au_{xx} u &= 0 \iff (r_1)_x = \frac{3}{2} a(uu_x)_x \\
 -\frac{3}{2} au^2 u_x - au_{xxx} + \frac{3}{4} au_{xxx} + u_t &= 0
 \end{aligned}$$

Puede elegirse $r_1 = \frac{3}{2} au_x$ y así obtener

$$r_1 = \frac{3}{2} auu_x ; r_4 = \frac{3}{2} auu_x$$

$$u_t + \frac{3}{2} au^2 u_x - \frac{1}{4} au_{xxx} = 0$$

Eligiendo $a = -4$ se obtiene la ec. MKdV.

ANEXO 3

En(2-31) exigimos $[B, R] = 2a \psi_x$. Se obtiene

$$r_2 = \frac{2a}{\beta_1 - \beta_2} u_x^* ; \quad r_3 = - \frac{2a}{\beta_1 - \beta_2} u_x \quad (i)$$

En(2-31) exigimos $u_t + BR_x + [U, R] - a u_{xx} = 0$, se obtiene

$$\begin{array}{l} \beta_1(r_1)_x + r_3 u^* - r_2 u = 0 \\ \beta_2(r_4)_x - r_3 u^* + r_2 u = 0 \end{array} \quad (ii)$$

$$\begin{array}{l} u_t + \beta_2(r_3)_x - a u_{xx} - (r_4 - r_1)u = 0 \\ u_t + \beta_1(r_2)_x - a u_{xx}^* + (r_4 - r_1)u^* = 0 \end{array} \quad (iii)$$

(ii) $\Rightarrow (\beta_1 r_1 + \beta_2 r_4) = \text{cte}$. Arbitrariamente elegimos esta constante igual a cero. Luego

$$\beta_1 r_1 + \beta_2 r_4 = 0 \quad (iv)$$

Reemplazando (ii) y (iv) en (iii)

$$u_t - 2a \frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} u_{xx} - a u_{xx} + r_1 \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2} u = 0$$

$$u_t^* + 2a \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} u_{xx}^* - a u_{xx}^* - r_1 \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2} u^* = 0$$

$$i u_t + \left(-ia \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \right) u_{xx} + \left(i r_1 \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2} \right) u = 0$$

(v)

$$i u_t + \left(-ia \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \right)^* u_{xx} + \left(i r_1 \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2} \right)^* u = 0$$

CAPITULO 3

HECHOS QUE HAN CONTRIBUIDO A UNA MEJOR COMPRESION DE
LOS FENOMENOS NO LINEALES

1. INTRODUCCION

En los últimos 20 años se ha evidenciado un gran progreso en la comprensión de los fenómenos no lineales a través de, básicamente, dos ramas troncales. Por un lado se incluyen estudios para predecir el comportamiento de un sistema en su transición desde un movimiento ordenado hacia un movimiento caótico; las referencias 22 y 23 ofrecen una adecuada ilustración sobre el tema. Por otro lado tenemos el estudio de sistemas completamente integrables, en donde un nuevo concepto, el SOLITON, aparece con una marcada y singular importancia; el presente trabajo, en su integridad, se encuentra enmarcado en esta rama.

Las secciones 2, 3 y 4 del presente capítulo tienen un carácter descriptivo. Nuestra intención es ofrecer una visión general de cual ha sido el desarrollo del estudio de los solitones.

2. SOLITONES

2.1 Cómo se generan ondas de perfil rígido.

Acerca de los solitones hemos, ya, hecho referencia en la

introducción del Capítulo 2 Continuemos aquella breve descripción tratando de explicar porque causó sorpresa el encontrar ondas que, satisfaciendo una ecuación no lineal, viajaran sin sufrir deformación alguna.

Comparemos el comportamiento de las soluciones de la ec. lineal

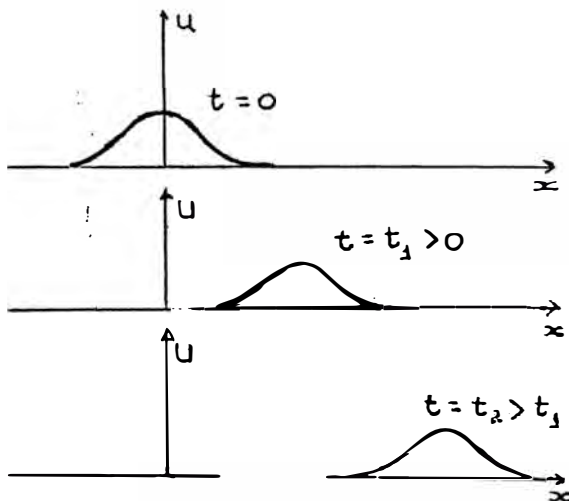
$$u_t + u_0 u_x = 0 \quad , \quad u_0 \text{ cte.} \quad (3-1a)$$

con las de una ec. obtenida al añadir un término no lineal

$$u_t + u_0 u_x + uu_x = 0 \quad (3-2a)$$

Estamos considerando $u: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

La solución general a la ec. lineal (3-1a) está dada por



$$u(x,t) = f(x - u_0 t) \quad (3-1b)$$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ función real

la cual describe un perfil de onda desplazándose con velocidad constante u_0 y sin deformarse. El comportamiento de una solución particular es indicado en la fig. 1.

1. La llamamos onda lineal porque su comportamiento está gobernado por una ec. diferencial lineal.

Fig. 1. Comportamiento de una onda lineal

Al poner la ecuación (3-2a) en la forma $u_t + (u_0 + u)u_x = 0$, nos sugiere la solución siguiente*

$$u(x,t) = f(x - (u_0 + u)t) \quad , \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ func. arb.} \quad (3-2b)$$

La expresión (3-2b) proporciona la solución en forma implícita, e indica que un "trocito" de curva cuya ordenada es u , viaja con velocidad $(u_0 + u)$. Los de mayor ordenada avanzan con mayor velocidad. Un caso particular es ilustrado en la fig. 2. La llamamos onda no lineal porque su comportamiento está gobernado por una ec. diferencial no lineal.

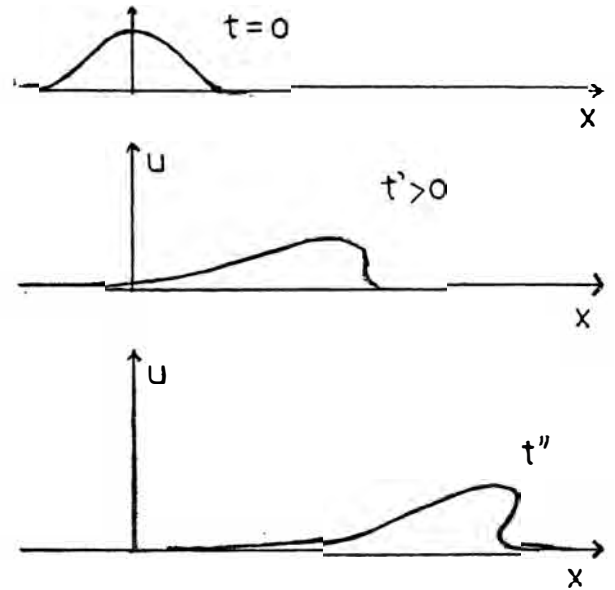


Fig. 2. Comportamiento de la onda no lineal gobernada por (3-2a).

* En efecto la función u definida aquí en forma implícita, satisface lo siguiente:

$$u_t = - \left[(u_0 + u) + u_t t \right] f'$$

$$(u_0 + u)u_x = \left[(u_0 + u) - (u_0 + u)u_x t \right] f'$$

y así

$$(u_t + u_0 u_x + u u_x) [1 + t f'] = 0$$

Como f es arbitraria (a excepción de aquella que haga nulo el segundo factor del primer miembro) resulta que u es solución de (3-2a).

La comparación de la ec.(3-1a) con (3-2a) y la fig. 1 con la fig. 2, nos sugiere que

la presencia de un término no-lineal en la ecuación es el causante que la onda se vaya deformando a medida que se propaga. (3-3)

En una interacción entre ondas no-lineales era de esperar que la deformación sea aún mayor. Sin embargo, en un estudio hecho en computadora, publicado en 1965* Zabusky y Kruskal refieren que ondas cuyo comportamiento está gobernado por la ecuación no lineal $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ recuperan el mismo perfil que presentan previa a la interacción. A las ondas con tales características las denominaron SOLITONES. Este resultado parece estar en contradicción con el que hemos esbozado en el párrafo anterior, las ondas deben deformarse a medida que avanzan. Una posible explicación podemos encontrarla estudiando el comportamiento de la ecuación

$$u_t + u_0 u_x + u_{xxx} = 0 \quad (3-4a)$$

Consideremos una condición inicial $u(x,0)$, y expresémosla como una suma de funciones armónicas

$$u(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp(ikx) dk$$

* Ver Ref. 6.

la solución u estará dada por

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp [i(kx - w(k)t)] dk \quad (3-4b)$$

donde $w(k) = u_0 k - k^3$

Puesto que cada onda componente $\exp i(kx-wt)$ tiene diferente velocidad de fase $v_f(k) = w(k)/k$, el perfil se dispersa a medida que transcurre el tiempo. Se ha tratado de esquematizar este comportamiento en la fig. 3.

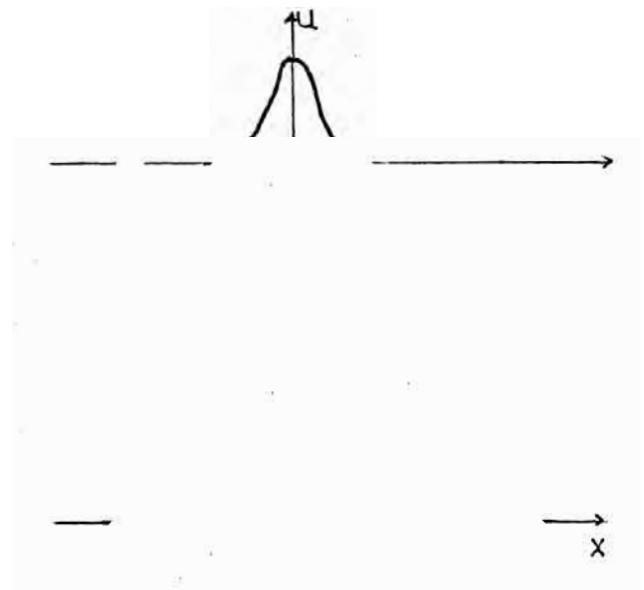


Fig. 3 Comportamiento de una onda en un medio dispersivo.

Consideremos ahora la ecuación

$$u_t + u_0 u_x + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (3-5)$$

De acuerdo a los resultados descritos en las líneas anteriores, es de esperar una competencia entre la tendencia a un empinamiento (debido al término no lineal uu_x) y aun ensanchamiento (debido al término dispersivo u_{xxx}). Esto puede dar lugar a una onda cuyo perfil tenga una forma rígida. ¡Ello ocurre!

Para verificarlo, ponemos la ecuación (3-5) en la forma

$$u_t + (u_0 + u)u_x + u_{xxx} = 0$$

y trabajamos con $v = u_0 + u$

$$v_t + vv_x + v_{xxx} = 0 \tag{3-6a}$$

Una onda que se desplaza sin deformarse es de la forma $v(x,t) = f(x-ct)$, y este tipo de solución es el que buscaremos

(los detalles del procedimiento los indicamos en el Anexo 1, al final del presente capítulo; ver expresión 3-55). En efecto encontramos que (3-6a)

admite como solución

$$v(x,t) = 3c \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{c} (x-ct) \right] \tag{3-6b}$$

donde c es una constante

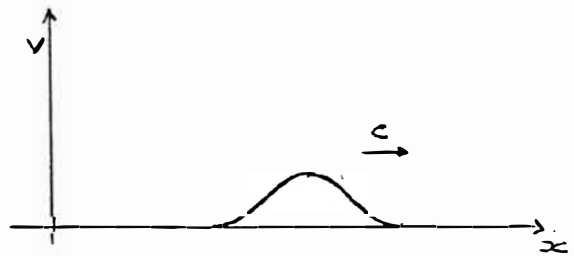


Fig. 4 Gráfica de 3-6b (t fijo)

La competencia entre un comportamiento no lineal y un comportamiento dispersivo, ha dado como resultado una onda de perfil rígido.

Este carácter de competencia entre tendencias del sistema a tener 2 o más comportamientos es válido también en otras ecuaciones no lineales que presentan ondas de perfil rígido como solución.

2.2 ¿Qué es un solitón?

Lo que hemos obtenido en (3-6b) es una familia monoparamétrica (el parámetro es c) de ondas no lineales que satisfacen (3-6a). Nótese como la amplitud depende de la velocidad, las de mayor amplitud tienen mayor velocidad; esto no ocurre en ondas lineales.

Hay otra característica muy interesante (que luego verificaremos analíticamente en el cap 4). Existen ciertos valores discretos de c c_1, c_2, \dots, c_N , para los cuales las correspondientes ondas no lineales recuperan el mismo perfil que presentan previa a la interacción (Ver fig. 5). Para otros valores de c esto no ocurre .

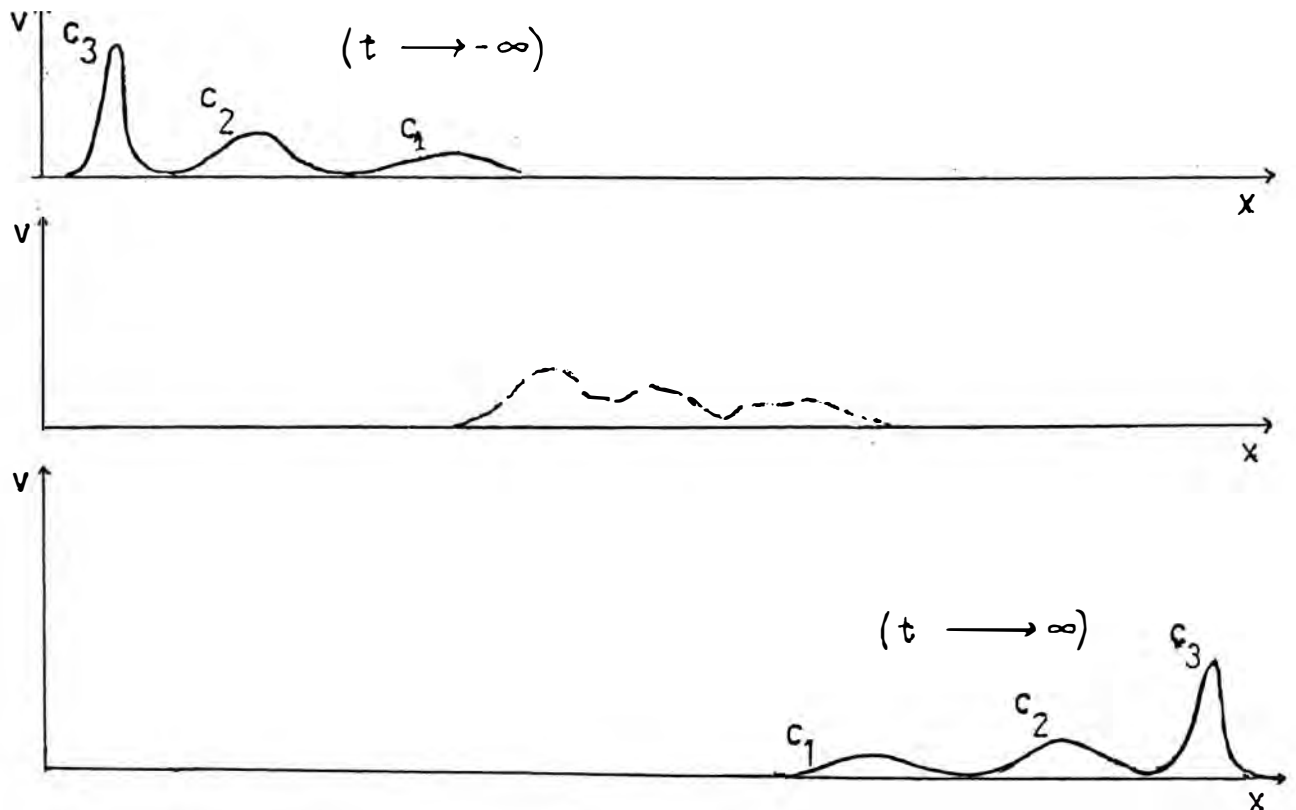


Fig. 5 Comportamiento de una solución particular de la ec. (3-6a). Asintóticamente (esto es, para $|t| \rightarrow \infty$) se descompone en 3 ondas del tipo (3-6b)

Algo, de similitud encontramos en esto con una de las propiedades de la ec. de Schrodinger 1-5b. Por ejemplo, para un potencial Q tal que $Q(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$, $Q_0 \leq Q(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ puede ocurrir que para cada valor de $Q_0 < k^2 < 0$ la solución exista. Sin embargo sólo para ciertos valores discretos k_j^2 , $j = 1, 2, \dots, N$ la correspondiente solución ψ_{k_j} resulta ser de cuadrado integrable y ellas son las que hasta el momento se les ha dado una interpretación física.

El comportamiento esquematizado en la fig. 5 es lo que caracteriza a los solitones. Para mayor precisión, damos la siguiente clasificación.

Onda viajera: depende de las coordenadas x (posición) y t (tiempo) solamente a través de $u(x,t)=f(x-ct)$

Onda solitaria: es una onda viajera localizada. La transición desde su valor asintótico en $x \rightarrow -\infty$ hacia el que toma en $x \rightarrow \infty$ la realiza, apreciablemente, en una región finita del espacio.

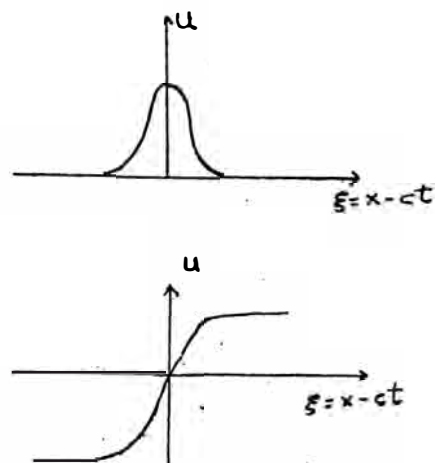


Fig.6 Dos tipos de ondas solitarias (para t fijo)

SOLITON: Está referido específicamente a soluciones de una ecuación diferencial no lineal. Es una onda solitaria que preserva su forma y velocidad luego de interactuar con otra onda solitaria.

Esta definición de solitón es la más usual (En la Ref. 19, pág. 4 se insiste en ello). Sin embargo, una mejor comprensión de su comportamiento se lleva a cabo cuando la ec. no lineal correspondiente alcanza a ser interpretada como un sistema hamiltoniano infinito dimensional completamente integrable; hablamos entonces de una ECUACION SOLITON, y la definición arriba indicada especifica solamente una condición necesaria para que una onda sea considerada como soliton. (La Ref. 3, págs. 35, 45, 120 hace hincapié en este aspecto) En el caso finito dimensional ($2m$ variables) se dice que un sistema hamiltoniano, es completamente integrable si encontramos m constantes de movimiento F_i , $i = 1, 2, \dots, m$, las cuales son independientes; este tipo de sistema admite una transformación de coordenadas que lo expresa como completamente separable y preserva el formalismo de estructura hamiltoniana: las variables de acción J_i $i = 1, 2, \dots, m$ las cuales son funciones de las constantes de movimiento F_i . En el caso de una ECUACION SOLITON las correspondientes variables de acción son los parámetros del solitón: velocidad, amplitud, etc.

Así, los parámetros del solitón están relacionados con las constantes de movimiento del hamiltoniano que ha sido asociado a la ecuación no lineal de la que él es solución. Esto permite entender porque una onda solitón mantiene su identidad en una interacción.

2.3 ¿Porqué interesa el estudio de los solitones?

Cuando se tiene un problema nuevo, uno trata de identificar la parte esencial y plantear el modelo más simple posible. A partir de él se va considerando, gradualmente, los términos que hacen más realista el problema y que inicialmente no tuvimos en cuenta. Tiene una importancia esencial saber identificar el punto de partida, el modelo inicial.

Cuando un fenómeno está gobernado por una ecuación no-lineal, un procedimiento usual ha sido eliminar, momentáneamente los términos no lineales; nuestro punto de partida es una ecuación lineal. Posteriormente, usando el método de perturbaciones, construimos las soluciones del problema no lineal a partir de las soluciones del correspondiente problema lineal. Este es el caso, por ejemplo, cuando consideramos una red cristalina y nuestro modelo inicial considera a las partículas moviéndose alrededor de su posición de equilibrio interactuando como si estuvieran unidas por resortes, $F = k\Delta$: comportamiento

armónico. Cuando los resultados de tal descripción no son satisfactorios, se considera que $F = k(\Delta + \alpha\Delta^2)$ y se dice que el cristal tiene un comportamiento anarmónico, cuyas soluciones se buscan en forma de una combinación lineal de las soluciones que describen el comportamiento armónico.

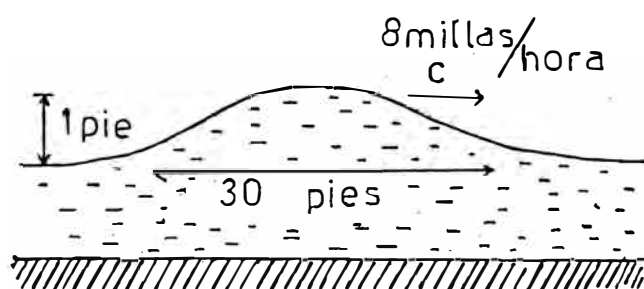
Sin embargo, en varios problemas de gran importancia tal procedimiento no ha resultado adecuado (en la Ref. 19, pág-2, se mencionan algunos casos). Lo más acertado no es partir del correspondiente problema lineal sino aislar en nuestro modelo no lineal aquella ecuación que admite soluciones del tipo solitón, y a partir de ellas recién aplicar el método de perturbaciones. Dada las propiedades de los solitones, tendremos un punto de partida, un estado base, muy estable.

	<u>Procedimiento</u> no adecuado	problema lineal + perturbación
PROBLEMA NO LINEAL	Procedimiento válido	solitones + perturbaciones

3. COMO LA FISICA SE INTERESA EN EL ESTUDIO DE LOS SOLITONES

3.1 Observaciones hechas por Scott Russel en un canal de agua.

En 1834 John Scott Russell quedó muy sorprendido al observar un nuevo tipo de onda de agua en la superficie de un canal. En su descripción original* refiere que estaba observando el movimiento de un bote que era jalado rápidamente por un par de caballos, a lo largo de un estrecho canal. Repentinamente el bote se detuvo, mas no así el agua que había puesto en movimiento tras de si, y cerca a la proa se acumuló una porción de agua para luego salir y avanzar a gran velocidad de lo largo del canal en forma de una solitaria elevación sin,



aparentemente, cambiar su forma o disminuir su velocidad. La persiguió con su caballo y la onda preservaba su perfil original de unos 30 pies de largo, 1 a 1 1/2 pie de altura, velocidad de 8 a 9 millas por hora. Su altura disminuía

gradualmente y después de una persecución de 1 a 2 millas la onda se perdió al final del canal.

Las ideas propuestas por Scott Russell fueron recibidas al principio con escepticismo, tanto Airy como Stokes cuestionaron

* La transcripción de una parte de este original podemos encontrarla en la Ref. 3 pág. 21; el original se indica en la Ref. 27.

naron incluso la afirmación que una onda de agua avanzara sin cambiar de forma y estar siempre por encima del nivel de equilibrio. En 1849 Stokes publica un trabajo indicando que la única onda de perfil permanente era una onda sinusoidal y que modificaba su forma al incluir términos no lineales en su modelo (posteriormente admitió su error).

Newell (Ref. 3, pág. 24) indica que la importancia de las observaciones de Scott Russell pudo ser medida por la eminencia de los hombres que se dedicaron a su estudio y encontraron su explicación: Boussinesq (1872)* y Rayleigh (1876)

Tratando de dar respuesta a las objeciones de Airy y Stokes, en 1895 dos científicos holandeses Korteweg y de Vries** (aparentemente sin conocer los resultados de Boussinesq y Rayleigh) derivaron la ecuación, que ahora lleva su nombre, la cual describe ondas que se propagan en una sola dirección sobre la superficie de un canal de poca profundidad.

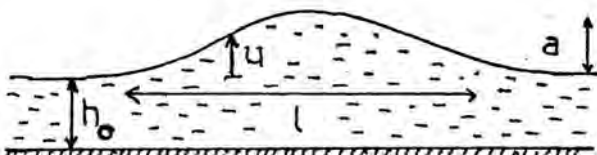


fig. 7

$$u_t + u_x + \frac{3}{2}\alpha uu_x + \frac{1}{6}\beta u_{xxx} = 0$$

$$\alpha, \beta \ll 1$$

Ec. de KdV

(3-7)

* Ver Ref. 29
** Ver Ref. 28

Salvo factores de escala, los términos que aparecen en la ecuación (3-7), están indicados en la Fig.7.

u elevación de la superficie por encima del nivel de equilibrio

h_0 profundidad del canal

a, λ amplitud y ancho de la onda, respectivamente

$$\alpha = \frac{a}{h_0} \quad , \quad \beta = \left(\frac{h_0}{\lambda} \right)^2$$

Con el cambio de variable

$$v(x', t') = 1 + \frac{3}{2} \alpha u(x, t)$$

$$x' = (6/\beta)^{1/2} \quad , \quad t' = (6/\beta) t$$

en (3-7) obtenemos una ec. para v . Tal ecuación es la misma que se indica en (3-6a). La onda solitaria que observó Scott Russell debió ser del tipo mostrado en (3-6b).

3.2 La conductividad térmica en los sólidos (1955)

Dado el carácter no lineal de la ec. KdV, en las décadas siguientes no se realizaron mayores avances en su estudio analítico. La ec. permaneció en el archivo.

El descubrimiento de otro aspecto importante de la ec. de KdV se produjo 60 años después, (1965), y no precisamente en un

estudio de hidrodinámica, sino que tuvo su origen en el siguiente cuestionamiento:

¿Porqué los sólidos presentan una conductividad térmica finita?

Usando como modelo una red unidimensional de longitud L , consistente en N masas idénticas conectadas en fila por $N-1$ resortes de longitud h , se obtenía una conductividad térmica efectiva infinita cuando se consideraba una interacción lineal a través de los resortes, $F = K\Delta$. (es lo que se indica en la Ref. 3, p. 25.). En 1914 Debye sugirió que la conductividad térmica finita, se debía a un comportamiento no lineal en los resortes usados como modelo.

Basados en esta sugerencia Enrico Fermi, John Pasta y Stanislaw Ulam (1955)* llevaron a cabo un estudio, en computadora, de una red anarmónica unidimensional. Partiendo de un estado inicial en que la energía se localizaba en los modos normales menores, la energía en cada modo debería permanecer invariable en el caso lineal ($F = K\Delta$), ningún nuevo modo normal debería ser excitado. En el caso no lineal, por ejemplo $F=k(\Delta + \alpha\Delta^2)$, ellos esperaban que la energía fluyera desde los modos de menor energía hacia los de mayor energía a consecuencia del acople no lineal entre las masas, y esto continuaría hasta que

* Ver Ref. 30

se estableciera un estado de equilibrio estadístico, con la correspondiente distribución de la energía en todos los modos normales del sistema.

Tratando de computar el tiempo que necesitaba el sistema en alcanzar este estado de equilibrio, Fermi, Pasta y Ulam se sorprendieron mucho al observar que el sistema mostraba poca

tendencia a la distribución

de la energía entre todos

sus grados de libertad. To-

mando como unidad de tiempo

$T = 2\pi(m/k)^{1/2}$, el 98% de

la energía se localizaba en

el modo fundamental luego

de 158 períodos T . Variando

el parámetro de no linea-

lidad en los resortes y

aumentando el número de par-

tículas desde 16 a 64, no

hubo diferencias cualitati-

vas en el comportamiento del

sistema: la energía se in-

tercambiaba sólo entre los modos normales más bajos. La

Fig. 8 es ilustrativa a este respecto (ella ha sido tomada de

la Ref. 21, pág. 38)

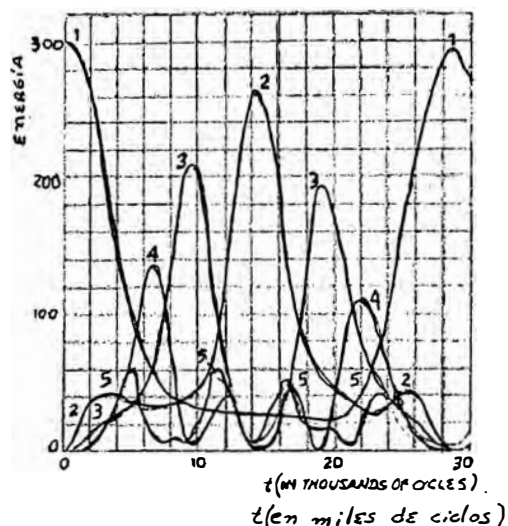


Fig. 8 Esta gráfica, muestra la energía total en cada uno de los primeros 5 modos normales del sistema, como función del tiempo.

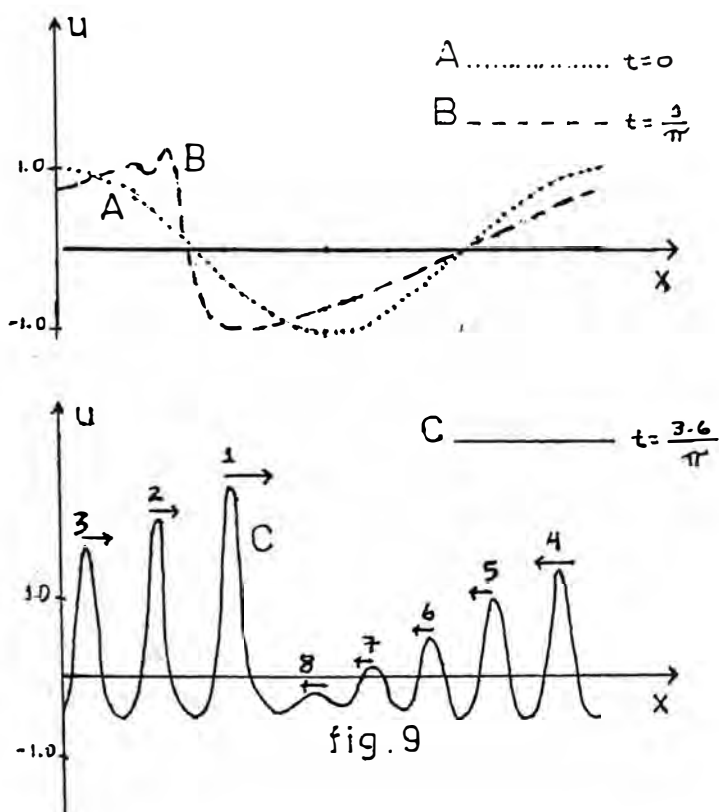
3.3 El descubrimiento de Zabusky y Kruskal: El Solitón

En 1960, Zabusky y Kruskal se interesan en el problema de Fermi, Pasta, Ulam, aproximando la red cristalina a un sistema continuo*, arribando a la ecuación

$$u_t + uu_x + \int^2 u_{xxx} = 0, \quad (\delta \text{ cte}) \quad (3-8)$$

que es la ec. de KdV aparecida en los estudios de hidrodinámica en 1895. Contando ahora con una herramienta adecuada, la computadora, ellos pudieron investigar las propiedades de dicha ecuación. Estando (3-8) relacionada a un sistema periódico, una red de masas vibrando alrededor de posiciones igualmente espaciadas, resultó conveniente elegir como condición inicial una función periódica $u(x,0) = \text{Cos } \pi x$. En su famosa publicación de 1965 (Ver. Ref. 6) ellos inician así la descripción

de sus resultados: "Nosotros hemos observado una inusual interacción no lineal entre ondas solitarias propagándose en un medio dispersivo". La fig. 9 la hemos tomado de ese trabajo. Después de un determinado intervalo de tiempo $t = 3.6 t_B$, $t_B = 1/\pi$, se observan 8 pulsos. Cada uno de ellos



* Ver Ref. 31

se desplaza con velocidad proporcional a su amplitud y, en consecuencia, se tiene la oportunidad de observar interacción entre ellas.

Fue una adecuada solución, mostrada en la fig. 8, la que obtuvieron Zabusky y Kruskal pues al consistir ésta en pulsos de amplitud gradualmente creciente les permitió clasificar los tipos de interacción que eran gobernados por la ec. de KdV.

a) Interacción entre pulsos de amplitudes muy diferentes.

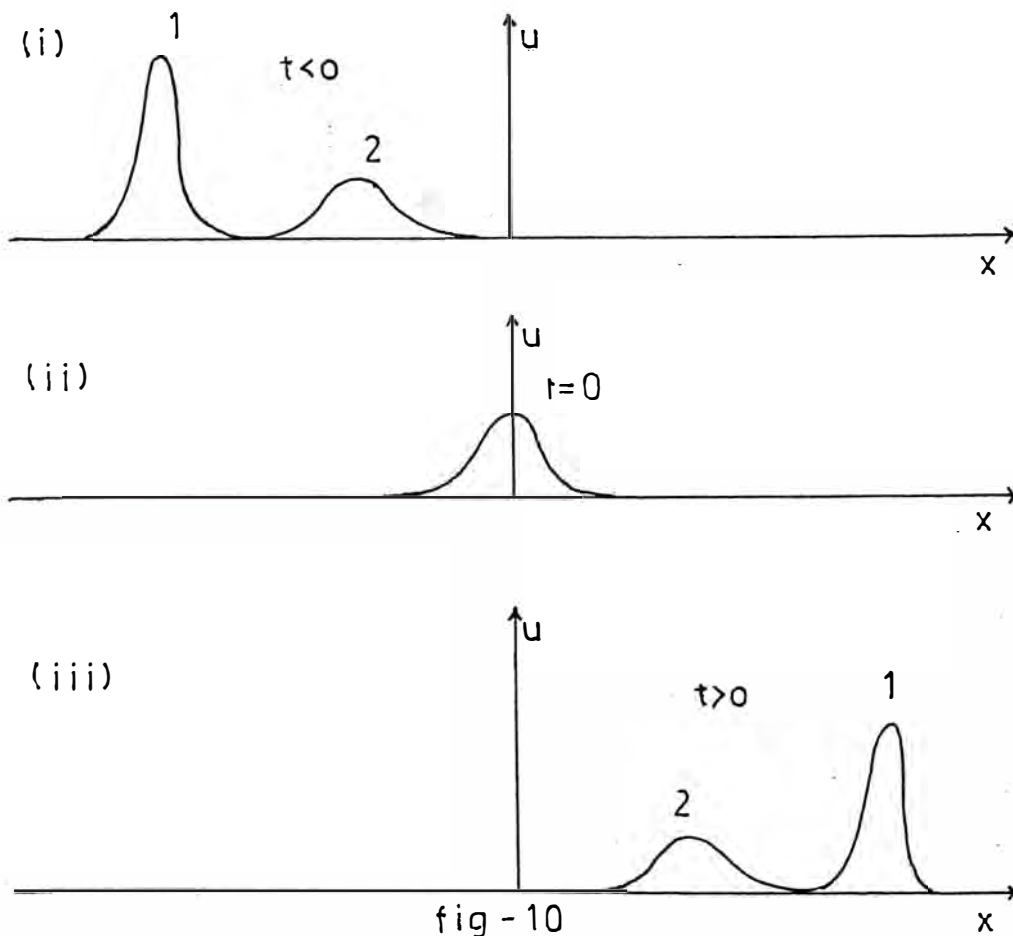


Fig. 10(i) La onda 1 de mayor amplitud, y así con mayor velocidad, va al alcance de la onda 2. Ambas presentan un perfil de las características del que se describe en la expresión 3-6b.

Fig. 10(ii) Se forma un pulso cuya amplitud es menor que la suma de las amplitudes individuales (lo cual no ocurre en el caso lineal) Este pulso no cumple las características de 3-6b.

Fig. 10(iii) Individualmente se han recuperado los perfiles de las ondas 1 y 2 Pero ahora la onda 1 va primera.

En el capítulo 4 tendremos la oportunidad de verificar analíticamente este resultado.

b) Interacción entre pulsos de amplitud no muy diferentes.

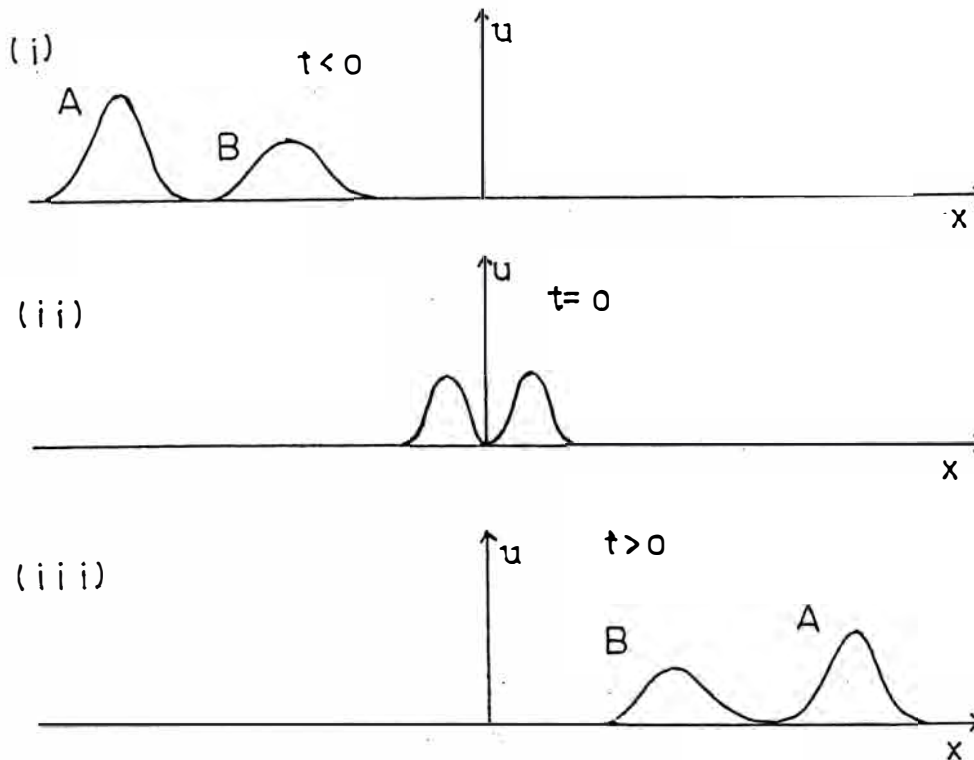


fig.11

Fig. 11(i) Inicialmente la onda tipo A va al alcance de la onda tipo B manteniendo ambas su identidad.

Fig. 11(ii) Cuando están suficientemente cerca, ellas parecen intercambiar de forma. La que era de tipo A empieza a disminuir su amplitud (y velocidad) mientras que la otra hace lo contrario.

Fig. 11(iii) Finalmente se tienen, otra vez, una onda del tipo A y otra del tipo B .

(La fig. 11-ii es una idealización nuestra. En su trabajo Zabusky y Kruskal, Ref. 6 , indican que de los resultados numéricos no es muy claro poder describir qué sucede cuando están muy cerca las ondas).

Este tipo de ondas solitarias que, satisfaciendo una ecuación diferencial no lineal, mantienen su identidad (amplitud, velocidad, forma) al interactuar con otra onda, las bautizaron con el nombre de solitones.

4. POSTERIORES AVANCES QUE CONTRIBUYEN AL ENTENDIMIENTO DE LOS FENOMENOS NO LINEALES

4.1 La transformación de Miura y el Método Inverso a la dispersión.-

Si en el problema de Fermi, Pasta, Ulam se considera un término cúbico en la interacción ejercida a través de los resortes, $F = k(A + \alpha \Delta^2 + \beta \Delta^3)$, y se toma el límite para describir el sistema como un continuo, se obtiene la ecuación.

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0 \quad \text{Ec. Modificada de KdV} \quad (3-9)$$

Fue Robert Miura quien dió el siguiente paso importante, que condujo a idear un método para resolver en forma exacta un problema no lineal. Miura observó que si la función v satisfacía la ecuación (3-9) y definíamos

$$u = v^2 + v_x \quad (\text{transformación de Miura}) \quad (3-10)$$

entonces u era solución de la siguiente ecuación

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad \text{ec. de KdV} \quad (3-11)$$

Ahora, para una función u dada, la relación (3-10) puede ser linearizada si usamos la transformación

$$v = \frac{\psi_x}{\psi} \quad (3-12)$$

El resultado es

$$\psi_{xx} - u\psi = 0 \quad (3-13)$$

Pero, notemos que la ec (3-11) es invariante bajo una transformación de coordenadas galileana. En efecto, con

$$u(x,t) = u'(x',t') - \lambda \quad , \quad \begin{aligned} x' &= x - 6\lambda t \\ t' &= t \end{aligned} \quad (3-14)$$

tanto u como u' satisfacen (3-11)

Así, en (3-13) reemplazamos $(u' - \lambda)$ en vez de u (y eliminamos el símbolo prima)

$$\Psi_{xx} + [\lambda - u(x,t)]\Psi = 0 \quad , \quad (\Psi_{xx} \equiv D^2\Psi) \quad (3-15)$$

Esta es la ecuación de Schrodinger estacionaria en la cual la función u , solución de la ec. de KdV (3-11), juega el papel de función potencial (t interviene como parámetro).

Se relacionaba de esta forma una ecuación no lineal, la ec. de KdV, con un operador lineal, el operador de Schrodinger (ver expresión 1-4). A partir de (3-15) germinó la idea para elaborar un método analítico de solución de la ecuación de KdV; en 1967, Gardner, Greene, Kruskal; Miura (Ver Ref. 7) usan el Método Inverso a la Dispersión (el cual hemos descrito en el capítulo 1) para ese efecto. Esto constituyó otra de las contribuciones importantes.

Resultó interesante verificar que, si bien para cada valor del parámetro t , en (3-15), se obtenía un nuevo potencial, a cada uno de ellos le correspondía los mismos autovalores discretos λ_j , $j = 1, 2, \dots, N$ (aquellos para los cuales la corres

pondiente autofunción ψ_j resulta de cuadrado integrable). Más interesante aún resultó poder identificar en el número de autovalores discretos, el número de solitones en interacción que describía la ec. de KdV (dada una condición inicial, exigida a la solución de la ec. de KdV, queda especificado el correspondiente número de solitones). En el capítulo 4 resolvemos analíticamente la ec. de KdV y tendremos la oportunidad de verificar los resultados que acabamos de mencionar.

En Diciembre de 1970 dos científicos rusos V. E. Zakharov y A. B. Shabat hacen extensiva la aplicación del Método Inverso a la Dispersión para resolver la ec.

$$u_{xx} + \gamma |u|^2 u + u_t = 0 \quad (\gamma \text{ cte}) \quad (3-16)$$

cuyas soluciones tienen el comportamiento de los solitones (ver ref. 15). Por su parecido a la ecuación de Schrodinger (1-1) esta ecuación es conocida con el nombre de ec. de Schrodinger no lineal, y se obtiene en los estudios de óptica y su perconductividad*

De esta manera se iba ampliando el espectro de los temas en Física que incluían el estudio de los solitones.

* La obtención de la ec. de Schrodinger no lineal a partir de la ec. de KdV ha sido tratado por Ravindran y Prasad, 1979 (Ref 32).

4.2 Leyes de conservación y estructura hamiltoniana

Paralelamente se estudiaba otra característica de la ec. de KdV consistente en que ella daba lugar a "leyes de conservación". Por ejemplo, $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$ puede ser expresada en la forma

$$u_t + \left(\frac{1}{2} u^2 + u_{xx} \right)_x = 0 \quad (3-17)$$

También, multiplicando (3-11) por u previamente, podemos obtener.

$$\left(\frac{1}{2} u^2 \right)_t + \left(\frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{2} u_x^2 + uu_{xx} \right)_x = 0 \quad (3-18)$$

sumiendo que u y sus derivadas con respecto a la coordenada espacial se anulan en $|x| \rightarrow \infty$, las expresiones (3-17) y (3-18) indican que, respectivamente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) dx = c_1 \text{ (cte.)}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u^2(x,t) dx = c_2 \text{ (cte.)},$$

$\forall t$

Miura, Gardner, Kruskal, 1968 (Ver Ref. 9) calculan explícitamente 10 maneras de expresar la ec. $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$, en la forma

$$\left(T^{(n)} \right)_t + \left(X^{(n)} \right)_x = 0 \quad n=1,2,\dots,10 \quad (3-19)$$

$$\begin{array}{ll}
 T^{(1)} = u & x^{(1)} = \frac{1}{2} u^2 + u_{xx} \\
 T^{(2)} = \frac{1}{2} u^2 & x^{(2)} = \frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{2} u_x^2 + u_{xx} \\
 T^{(3)} = \frac{1}{3} u^3 + u_x^2 & x^{(3)} = \frac{1}{4} u^4 + u^2 u_{xx} + 2uu_x^2 \\
 T^{(4)} = \frac{1}{4} u^4 - 3uu_x^2 + \frac{9}{5} u_{xx}^2 & -2u_x u_{xxx} + u_{xx}^2 \\
 T^{(5)} = \frac{1}{5} u^5 - 6u^2 u_x^2 + \frac{36}{5} uu_{xx}^2 & \dots\dots \\
 & - \frac{108}{35} u_{xxx}^2 \dots\dots \\
 & \dots\dots
 \end{array}$$

nótese como las expresiones para los polinomios $T^{(n)}$ y $X^{(n)}$ se hacen cada vez más complicados a medida que se incrementa n , pero ellos encontraron un algoritmo para construirlos. Existe un número infinito de estos polinomios, y por lo tanto infinitas cantidades que se conservan

$$\int_{-\infty}^{\infty} T^{(n)}(x,t) dx = c_n \text{ (cte), } \forall t \tag{3-20}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Estos resultados pudieron ser explicados cuando, en 1971, se publicó un trabajo de Gardner "La Ec. de KdV como un siste

ma hamiltoniano" (Ver Ref. 12) y otro de Zakharov y Fadeev "La ec. de Kdv: un sistema hamiltoniano completamente integrable" (ref. 32). Las coordenadas de acción, (hay un número infinito de ellas), asociadas a este hamiltoniano están relacionadas a las cantidades dadas en (3-20).

Por otro lado, Morikazu Toda había estudiado, en Japón 1967, una red unidimensional considerando que la fuerza entre partículas vecinas, era una función exponencial decreciente de su distancia de separación: la red de TODA. En 1968 obtuvo que su modelo describía la interacción entre dos solitones.

En 1974 Hermann Flaschka muestra que la red de Toda es un sistema Hamiltoniano integrable (Ref. 17). El camino seguido por él consistió en asociar a la ecuación de Toda un par de Lax, en forma similar a como hemos procedido nosotros en el Capítulo 2, con las ecuaciones de KdV, modificada de KdV y Schrodinger no lineal. M. Henon, por la misma fecha, obtuvo el mismo resultado de Flaschka, pero siguiendo un método diferente (Ver. Ref. 18).

En el presente trabajo no incluimos el estudio de los problemas no lineales como sistemas hamiltonianos integrables; de los cuales no tuvimos información en un primer momento. Sin embargo, es un tema interesante que merece ser abordado en una próxima oportunidad.

4.3 Unificación de los modelos

A lo largo de esta ligera descripción han aparecido una serie de ecuaciones cuyas soluciones se comportan como solitones: ec. de KdV, Modificada de KdV, Schrodinger no lineal, ec. de Toda. Continuando con esta serie de resultados interesantes que han aparecido en este tema, hemos encontrado una publicación de Deift, Lund, Trubowitz, 1980 (ver Ref. 20) quienes indican que todas estas ecuaciones, mencionadas líneas antes, pueden ser consideradas como el estudio de un sistema de osciladores sometidos a restricciones; para cada tipo de restricción se obtiene una de dichas ecuaciones. En las palabras de ellos.

"Moser y Trubowitz han mostrado que el estudio de la ecuación de KdV es simplemente el estudio de un movimiento armónico con restricciones. Aquí nosotros mostramos que esto mismo es válido para la ecuación de Schrodinger no lineal, Sine Gordon y la red de Toda. Brevemente hemos encontrado un cambio de variables bajo el cual estas ecuaciones se convierten en un sistema de osciladores libres sometidos a ligazones cuadráticas. Esto es análogo al caso lineal en el cual el estudio de las ecuaciones de onda con coeficientes constantes es reducida, vía la transformada de Fourier, al estudio de osciladores armónicos con acoplamiento lineal. Una ecuación difiere de otra al elegir distintos acoplamientos. Nosotros no hemos dudado

que nuestra técnica puede ser aplicada al problema de una cadena de spines de Heisenberg continua, ecuación generalizada de Sine Gordon, el modelo de Thirring clásico y otras ecuaciones de onda no lineales asociadas con un problema lineal de segundo orden".

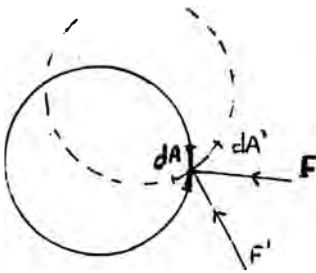
Hoy en día están en estudio nuevas estructuras matemáticas a partir de las cuales las propiedades de los solitones resultan ser una consecuencia natural. Estas nuevas ideas las encontramos en un excelente libro escrito por Alan C. Newell (Ref. 3 , Cap. 5). La forma como introduce al lector el interés en el tema es algo digno de resaltar.

5. HIDRODINAMICA

5.1 Ecuaciones que gobiernan los fenómenos en hidrodinámica

Las ecuaciones que obtengamos serán válidas para un líquido perfecto. Esto es:

o La fuerza que actúa sobre la superficie dA de un elemento de volumen del líquido, está siempre en la dirección normal*



o Si consideramos dos elementos de área dA y dA' pertenecientes a superficies de elementos de volumen diferentes, pero que tienen un punto P en común, los cocientes $\frac{F}{dA}$ y $\frac{F'}{dA'}$ tienen el mismo valor. Este cociente es denominado presión hidráulica **

Consideremos un elemento de volumen ΔV y masa m . Sea P un punto contenido en este volumen cuyas coordenadas, en el instante t están dadas por

$$OP = (x_1(t), x_2(t), y(t))$$

(*) En el caso de un fluido viscoso la fuerza F ya no es normal a dA

(**) En problemas de equilibrio, la presión hidráulica depende sólo de la posición.

De acuerdo a la Ley de Newton

$$\overline{OP} = \frac{\sum_i \mathbf{F}_i}{m}$$

donde $F_1, F_2 \dots$ son las fuerzas externas que actúan sobre el elemento.

$$\overline{OP} = (x_1, x_2, y) = \bar{r}$$

Usualmente se tienen en cuenta las siguientes fuerzas

- o gravedad
- o la fuerza resultante de las presiones que actúan sobre las caras del elemento de volumen

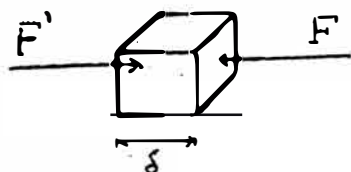
$$\ddot{\overline{OP}} = \frac{\text{peso}}{m} + \frac{\text{fuerzas de presión}}{m}$$

$$\ddot{\overline{OP}} = \bar{g} + \frac{1}{\rho} \frac{\text{fuerzas de presión}}{v} \quad (3-21)$$

donde $\rho = \frac{m}{v}$. En general la densidad ρ no es uniforme

Cálculo de las fuerzas de presión.

Consideremos la primera componente F_{x_1}



$$F = p(x_1 + \frac{\delta}{2}) \Delta A$$

$$F' = p(x_1 - \frac{\delta}{2}) \Delta A$$

$$\Delta v = (\delta)(\Delta A)$$

Aproximando, $p(x_1 \pm \frac{\delta}{2}) \approx p(x_1) \pm \frac{1}{2} \delta \frac{\partial p}{\partial x_1}$

$$F_{x_1} = F' \quad F = -\Delta A \frac{\partial p}{\partial x_1} \delta = -\Delta V \frac{\partial p}{\partial x_1}$$

En forma similar se calculan las componentes de la fuerza total en los otros ejes, para así obtener

$$\frac{\text{fuerzas de presión}}{\Delta v} = -\nabla p$$

reemplazando en (3-21)

$$\frac{\dot{\vec{O}}P}{\rho} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3-22)$$

La expresión (3-22) sugiere que estamos siguiendo el rastro del punto P, es decir, se aspira a encontrar una descripción directa del movimiento de cada partícula individual del fluido como función del tiempo. Esta es la forma Lagrangiana de encarar el problema, se busca la trayectoria seguida por el punto.

Nosotros abandonaremos este punto de vista adoptando la forma euleriana, la cual consiste en determinar la distribución de velocidades en la región ocupada por el fluido. Es decir, se espera sea posible que a cada punto fijo P de dicha región se le pueda asignar un vector u , el cual en general puede depender del tiempo, que coincida con el vector velocidad del elemento de fluido que está pasando en ese

instante por el punto P.

O sea

Busamos $\bar{u} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que

(3-23)

$$\bar{u}(\mathbf{r}(t), t) \equiv \dot{\bar{O}P} = \dot{\bar{r}}(t)$$

Derivamos con respecto a t en(3-23)

$$\ddot{\bar{O}P} = (\bar{u} \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t}) \dot{\bar{u}}$$

e igualamos con (3-22)

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \bar{g} - (\bar{u} \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t}) \bar{u}$$

Usando $(\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = \nabla(\frac{1}{2} \bar{u}^2) + (\nabla \times \bar{u}) \times \bar{u}$

la expresión anterior puede ser puesta en la forma

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \bar{g} - \nabla(\frac{1}{2} \bar{u}^2) - (\nabla \times \bar{u}) \times \bar{u} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$$

Considerando que el movimiento del fluido es irrotacional, o sea $\nabla \times \bar{u} = \bar{0}^*$, y que $\bar{g} = \nabla(\bar{g} \cdot \bar{r})$, la ec. se reduce a

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \bar{g} - \nabla(\frac{1}{2} \bar{u}^2) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad (3-24)$$

* En la Ref. 5 pág. 432, se indica que si $\nabla \times \bar{u} = \bar{0}$ en un instante, esto se mantiene así para todo instante posterior.

Nuestras incógnitas son p, ρ y las tres componentes de \bar{u} , $\bar{u} = (u_1, u_2, v)$, sin embargo la expresión (3-24) nos proporciona sólo 3 ecuaciones que las relacionan. Si asumimos que el líquido es incompresible, la densidad ρ puede ser tomada como una constante conocida y así requeriremos de sólo una ecuación más. Ahora, el hecho que ρ sea constante, implica que si tomamos una superficie arbitraria (fija en el espacio) la cantidad de fluido que sale de ella debe ser igual a la que penetra, matemáticamente esto puede expresarse así

$$\int_S \rho \bar{u} \cdot d\bar{a} = 0$$

aplicando el teorema de divergencia

$$\int_V \nabla \cdot (\rho \bar{u}) dv = \int_S \rho \bar{u} \cdot d\bar{a} = 0$$

siendo esta relación válida para cualquier volumen, se cumple que $\nabla \cdot (\rho \bar{u}) = 0$. Como ρ es constante, entonces $\nabla \cdot \bar{u} = 0$

Así, las ecuaciones que gobiernan el movimiento irrotacional de un líquido ideal e incompresible, son:

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla(g \cdot r) - \nabla \left(\frac{1}{2} \bar{u}^2 \right) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$$

(3-25)

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0$$

Como $\nabla x u = 0$, buscaremos una solución para u en la forma $\bar{u} = \nabla \psi$. Al reemplazar esto en (3-25) y antiderivando, se obtiene

$$\frac{p - p_0}{\rho} = B(t) - \psi_t - \frac{1}{2}(\nabla \psi)^2 - g(y - y_0), \quad \psi = \psi(x, t)$$
$$\nabla^2 \psi = 0$$

donde $B(t)$ es una función arbitraria y y_0 , p_0 son constantes arbitrarias que han sido separadas de $B(t)$ por conveniencia*. La función B puede ser suprimida si definimos $\psi'(x, t) = \psi(x, t) - \int^t B(r) dr$. cosa que asumiremos como realizada.

Nuestro problema consiste entonces en resolver la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \psi = 0 \tag{3-26a}$$

y, a partir de su solución, obtener las cantidades físicas p y u

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -\psi_t - \frac{1}{2}(\nabla \psi)^2 - g(y - y_0)$$
$$\bar{u} = \nabla \psi \tag{3-26b}$$

* No necesariamente la presión hidráulica vale p_0 en la coordenada $y = y_0$. Tanto p_0 como y_0 son constantes arbitrarias que son fijadas según la conveniencia del problema.

Ahora bien, cuando estamos estudiando el movimiento de una porción de líquido, bajo la acción del campo gravitatorio, lo encontramos contenido en un recipiente y sujeto en la parte superior, a la presión p_0 del aire que lo rodea, esto va a condicionar su movimiento, lo cual equivale a decir que la solución a (9-1) debe satisfacer además unas condiciones de contorno que precisamos a continuación.

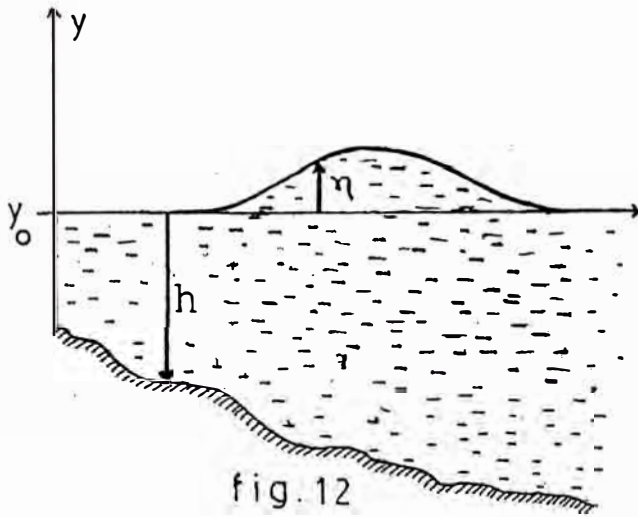


fig. 12

Las superficies de división las describimos por

$$f(x_1, x_2, y, t) = 0$$

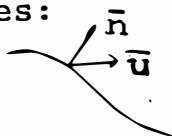
La propiedad que define a esta superficie es que el líquido no la atraviesa.

Matemáticamente, esto se expresa así*:

$$\bar{u} \cdot \nabla f = - f_t$$

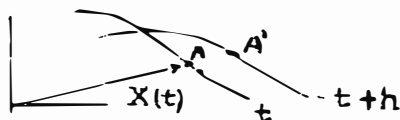
* Tratemos de justificar esta expresión

- o La componente normal de la velocidad de una pequeña porción de líquido que se encuentra sobre la superficie f es:



$$\bar{n} \cdot \bar{u} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \cdot \bar{u} \quad (i)$$

- o Elijo un punto A de la superficie f y parametrizo su trayectoria. Los puntos de la trayectoria seguida por



A satisfacen $f(\bar{x}(t), t) = 0$. Derivando se tiene

$$\nabla f \cdot \frac{d\bar{x}}{dt} + f_t = 0$$

velocidad del punto A

Se cumple

$$\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \cdot \frac{d\bar{x}}{dt} = - \frac{1}{\|\nabla f\|} f_t \quad (ii)$$

componente normal de
la velocidad del punto A

- o Si el líquido no atraviesa la superficie f significa que las expresiones (i), (ii), son iguales: $\nabla f \cdot \bar{u} = -f_t$ ■

$$u_1 f_{x_1} + u_2 f_{x_2} + v f_y + f_t = 0 \quad (3-27)$$

$$\bar{u} = (u_1, u_2, v) \quad , \quad \nabla f = (f_{x_1}, f_{x_2}, f_y)$$

a) Condiciones de contorno exigidas en la superficie de separación líquido-aire:

a1) Esta superficie suele ser descrita en la forma

$$f(x_1, x_2, y, t) = \eta(x_1, x_2, t) - y = 0$$

que, al exigir se cumpla (3-27), toma la forma

$$\eta_t + u_1 \eta_{x_1} + u_2 \eta_{x_2} = v$$

y como $u = \nabla \psi$, se tiene

$$\eta_t + \psi_{x_1} \eta_{x_2} + \psi_{x_2} \eta_{x_2} = \psi_y \quad (3-28)$$

a2) Si consideramos que la variación de la presión en la velocidad de la superficie divisoria, desde el líquido hacia el aire, se realiza en forma continua, la expresión (3-26) indica que*

$$\psi_t + \frac{1}{2} (\nabla\psi)^2 + g\eta = 0 \quad (3-29)$$

b) Condiciones de contorno exigidas en la superficie de separación líquido-recipiente.

Esta superficie suele ser descrita en la forma

$$f(x_1, x_2, y, t) = h(x_1, x_2) + y = 0$$

Al exigir que se cumpla (3-27) resulta

$$\psi_{x_1} h_{x_1} + \psi_{x_2} h_{x_2} + \psi_y = 0 \quad (3-30)$$

En el caso particular que la profundidad sea constante, se tiene

$$\psi_y = 0$$

* La aproximación que estamos haciendo es que el valor de la presión en el aire, en la vecindad del fluido, no se ve afectado por el movimiento de este. Su valor lo consideramos constante e igual a p_0 , que corresponde al caso en que no hay movimiento del líquido, $y = y_0 = 0$.

Estamos considerando también que la presión hidráulica en los puntos de la superficie de separación es igual a p_0

En resumen, nuestro problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 \eta_t + \psi_{x_1} \eta_{x_1} + \psi_{x_2} \eta_{x_2} &= \psi_y \\
 \psi_t + \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + g \eta &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots \text{ en } y = \eta(x_1, x_2, t) \\
 & \nabla^2 \psi = 0 \qquad \dots -h < y < \eta \\
 & \psi_{x_1} h_{x_1} + \psi_{x_2} h_{x_2} + \psi_y = 0 \qquad \text{en } y = -h(x_1, x_2)
 \end{aligned} \tag{3-31}$$

Estas ecuaciones corresponden a la fig.12

5.2 Obtención de la ec. de KdV

Para simplificar consideremos el caso en que la profundidad es constante y que la forma de la onda no cambia a lo largo de uno de los ejes.

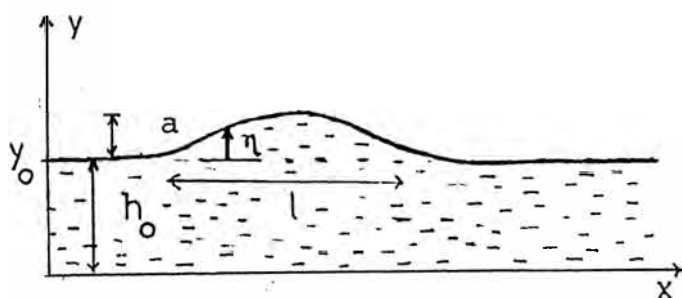


Fig. 13

La superficie de separación aire-agua es descrita en la forma

$$f(x, y, t) = h_0 + \eta(x, t) - y = 0$$

que al reemplazar en (3-27) resulta

$$\eta_t + \psi_x \eta_x = \psi_y \qquad \text{para } y = h_0 + \eta \tag{3-32}$$

En las coordenadas $y = h_0 + \eta$ la presión vale $p = p_0$ (ver nota al pie de la pág 103) con lo cual la ecuación (3-26) indica que*

$$\psi_t + \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + g\eta = 0 \quad \text{para } y = h_0 + \eta \quad (3-33)$$

La superficie de separación suelo-agua es descrita en la forma .

$$f(x,y,t) = y = 0$$

y al reemplazar en (3-27) resulta

$$\psi_y = 0 \quad \text{para } y = 0 \quad (3-34)$$

Nuestro problema a resolver es

$$\left. \begin{array}{l} \eta_t + \psi_x \eta_x = \psi_y \\ \psi_t + \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + g\eta = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \dots \text{ para } y = h_0 + \eta \\ \dots \end{array} \quad (3-35)$$

$$\nabla^2 \psi \quad \dots \quad \text{para } 0 < y < h_0 + \eta$$

$$\psi_y = 0 \quad \dots \quad \text{para } y = 0$$

estas ecuaciones corresponden a la fig.13

* En este caso, la constante arbitraria y_0 que aparece en la ecuación (3-26) ha convenido hacerla igual a h_0

Varias veces hemos resuelto la ecuación de Laplace sujeta a condiciones de contorno. Pero nótese que en este caso, la ec.(3-35), las condiciones de contorno no están dadas en forma explícita (todo lo que se sabe de ellas ha sido deducido a partir de la propiedad que el líquido no atraviesa las superficies de contorno); es más, en las expresiones usadas para dar las condiciones de contorno aparece $\eta = \eta(x, t)$ cantidad que precisamente estamos interesados en conocer. Resulta atractivo averiguar cómo se resuelve este tipo de problemas.

Caractericemos una onda por su amplitud "a" y su ancho " λ " (ver fig.13) e introduzcamos los parámetros $\alpha = a/h_0$, $\beta = (h_0/\lambda)^2$ los cuales nos permitirán identificar qué tipo de ondas describen nuestras ecuaciones. Trabajaremos con variables adimensionales (primadas)

$$\begin{aligned}
 x &= \lambda x' & t &= \frac{\lambda}{c_0} t' & \psi &= \frac{g \lambda a}{c_0} \psi' & & (3-36) \\
 \eta &= a \eta' & y &= h_0 y' & c_0 &= \sqrt{gh}
 \end{aligned}$$

Con este cambio de variable la ecuación (3-25) toma la forma (quitamos los símbolos de 'prima' para simplificar la notación)

$$\begin{array}{l}
 \eta_t + \alpha \psi_x \eta_x = \frac{1}{\beta} \psi_y \\
 \psi_t + \alpha \psi_x^2 + \frac{\alpha}{\beta} \psi_y^2 + \eta = 0
 \end{array} \left| \begin{array}{l}
 \dots \text{ para } y = 1 + \alpha \eta \\
 \dots \text{ para } y = 0
 \end{array} \right.$$

$$\beta \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0 \quad \dots \quad 0 < y < 1 + \alpha \eta \quad (3-37)$$

$$\psi_y = 0 \quad \dots \quad \text{para } y = 0$$

Buscamos una solución en la forma

$$\psi(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} y^m \varphi_m(x, t) \quad (3-38)$$

$$\psi_y(x, 0, t) = 0 \Rightarrow \varphi_{2m+1} = 0, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3-39)$$

$$\beta \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0 \Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} [\beta \varphi_{mxx} + (m+1)(m+2) \varphi_{m+2}] y^m = 0$$

$$\varphi_{m+2} = - \frac{\beta \varphi_{mxx}}{(m+1)(m+2)}$$

y así

$$\varphi_{2m} = (-1)^m \frac{\beta^m}{(2m)!} \frac{\partial^{2m} \varphi_0}{\partial x^{2m}}, \quad m=0, 1, 2, \dots \quad (3-40)$$

Nuestro interés será puesto en la descripción de ondas para las cuales $\beta = (h_0 / \lambda)^2 \ll 1$ Con los resultados (3-39) y (3-40) la función ψ , en (3-38), toma la forma

$$\Psi(x, y, t) = \Psi_0(x, t) - \frac{1}{2} \beta y^2 \Psi_{0xx}(x, t) + \frac{1}{24} \beta^2 y^4 \Psi_{0xxx}(x, t) + O(\beta^4)$$

(3-41)

Si las condiciones de contorno correspondientes a $y = 1 + \alpha \eta$ (ver 3-37) fuesen conocidas, a partir de ellas podríamos determinar Ψ_0 ; sin embargo, como comentábamos líneas atrás, en las condiciones de contorno aparece la función como incógnita. Nosotros esperamos que al reemplazar (3-41) en (3-37) pueda despejarse una ecuación para η

Con $\eta_t + \alpha \eta_x \Psi_x - \frac{1}{\beta} \Psi_y =$ se obtiene

$$\eta_t + [(1 + \alpha \eta) \Psi_{0x}]_x - \beta \left[\frac{1}{6} (1 + \alpha \eta)^3 \Psi_{0xxxx} + \frac{1}{2} \alpha (1 + \alpha \eta)^2 \eta_x \Psi_{0xxx} \right] + O(\beta^2) = 0$$

(3-42)

y de $\Psi_t + \alpha \Psi_x^2 + \frac{\alpha}{\beta} \Psi_y^2 + \eta = 0$

$$\eta + \Psi_{0t} + \frac{1}{2} \alpha \Psi_{0x}^2 - \frac{1}{2} \beta (1 + \alpha \eta)^2 \left[\Psi_{0xxt} + \alpha \Psi_{0x} \Psi_{0xxx} - \alpha \Psi_{0xx}^2 \right] + O(\beta^2) = 0$$

(3-43)

Si simplificamos los términos de orden $\alpha\beta$, resulta,

$$\eta_t + [(1 + \alpha \eta) \Psi_{0x}]_x - \frac{1}{6} \beta \Psi_{0xxxx} + O(\alpha\beta; \beta^2) = 0$$

$$\eta + \Psi_{0t} + \frac{1}{2} \alpha \Psi_{0x}^2 - \frac{1}{2} \beta \Psi_{0xxt} + O(\alpha\beta, \beta^2) = 0$$

Usando $w = \Psi_{0x}$ y derivando con respecto a x la segunda ecuación, se tiene:

$$\eta_t + [(1+\alpha\eta)w]_x - \frac{1}{6}\beta w_{xxx} + \sigma(\alpha\beta, \beta^2) = 0 \quad (3-44)$$

$$\eta_x + w_t + \alpha w w_x - \frac{1}{2}\beta w_{xxt} + \sigma(\alpha\beta, \beta^2) = 0$$

$$\alpha = (a/h_0) \quad \beta = (h_0/l)^2 \quad (\text{ver fig.13})$$

Para el caso extremo de anular los términos de primer orden en α y β , la ec. (3-44) toma la forma

$$\eta_t + w_x + \sigma(\alpha, \beta) = 0$$

$$\eta_x + w_t + \sigma(\alpha, \beta) = 0$$

la cual admite como solución

$$w = \eta \quad (3-45)$$

si η es una solución de la ecuación

$$\eta_t + \eta_x + \sigma(\alpha, \beta) = 0 \quad (3-46)$$

Esto nos sugiere buscar una solución para (3-44) en la forma

$$w = \eta + \alpha A + \beta B \quad (3-47)$$

Reemplazando (3-47) en (3-44)

$$\eta_t + \eta_x + \alpha [A_x + 2\eta\eta_x] + \beta [B_x - \frac{1}{6} \eta_{xxx}] + \sigma(\alpha^2, \beta^2, \alpha\beta) = 0 \quad (3-48)$$

$$\eta_t + \eta_x + \alpha [A_t + \eta\eta_x] + \beta [B_t - \frac{1}{2} \eta_{xxt}] + \sigma(\alpha^2, \beta^2, \alpha\beta) = 0$$

como (23-2) indica que $\eta_t = -\eta_x + \sigma(\alpha, \beta)$, resulta

$$\eta_t + \eta_x + \alpha [A_t + \eta\eta_x] + \beta [B_t + \frac{1}{2} \eta_{xxx}] + \sigma(\alpha^2, \beta^2, \alpha\beta) = 0 \quad (3-49)$$

Las ecuaciones (3-48) y (3-49) son compatibles si

$$\begin{aligned} A_t - A_x - \eta\eta_x = 0 & \quad A = -\frac{1}{4}\eta^2 \\ \Rightarrow \\ B_t - B_x + \frac{2}{3}\eta_{xxx} = 0 & \quad B = \frac{1}{3}\eta_{xx} \end{aligned}$$

Reemplazando en (3-47) y (3-48)

$$\begin{aligned} w &= \eta - \frac{1}{4}\alpha\eta^2 + \frac{1}{3}\beta\eta_{xx} \\ \eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + \frac{1}{6}\beta\eta_{xxx} + \sigma(\alpha^2, \beta^2, \alpha\beta) &= 0 \end{aligned} \quad (3-50)$$

que es la solución de (3-44)

A la ecuación

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + \frac{1}{6}\beta\eta_{xxx} = 0 \quad (3-51)$$

se le denomina ecuación de KdV en reconocimiento a Korteweg

y de Vries, quienes fueron los primeros en obtenerla (1985).

Es más usual encontrar la ecuación de KdV expresada en la forma

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (3-52)$$

la cual puede obtenerse a partir de (3-51) con el cambio de variable

$$1 + \frac{3}{2} \alpha \eta(x, t) = u(x', t')$$

$$\text{donde } x' = \frac{1}{\beta^{1/2}} x, \quad t' = \frac{1}{6 \beta^{1/2}} t$$

en el próximo capítulo se trabajará con

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (3-53)$$

que se obtiene a partir de (3-52) cambiando simplemente u por $-u$.

Anexo 1

PARA LA EC. DE Kdv $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$, ec.(3-53),

SE BUSCA UNA SOLUCION DE LA FORMA $u(x,t) = f(x-ct)$

$u(x,t) = f(x-vt)$.-

En (3-53), con $u = \frac{1}{6} v$ se obtiene la ec. (3-6a)

$$v_t + vv_x + v_{xxx} = 0$$

$$v(x,t) = f(x-ct) \implies v_t = -cf'$$

$$v_x = f' , vv_x = ff' , v_{xxx} = f'''$$

Reemplazando en la ec (3-6a)

$$-cf' + ff' + f''' = 0 \implies (-cf + \frac{1}{2} f^2 + f'')' = 0$$

Exigiendo que u y sus derivadas parciales tiendan a cero en $|x| \rightarrow \infty$, entonces

$$-cf + \frac{1}{2} f^2 + f'' = 0$$

$$f'^2 = \frac{1}{3}(f^2)(3c-f)$$

$$-cff' + \frac{1}{2} f^2 f' + f'' f' = 0$$

$$f' = \frac{1}{\sqrt{3}}(f)(3c - f)^{1/2}$$

$$(-\frac{c}{2} f^2 + \frac{1}{6} f^3 + \frac{1}{2} f'^2)' = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{(f)(3c - f)^{1/2}} f' = 1$$

$$-3cf^2 + f^3 + 3f'^2 = 0$$

Sea $s = x - ct$

$$f'^2 = \frac{1}{3}(f^2)(3c - f)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{f(s) [3c - f(s)]^{1/2}} f'(s) = 1$$

Esta expresión es de la forma

$$g'(f(s)) f'(s) = 1 \quad \text{con} \quad g'(r) = \frac{3}{r(3c-r)^{1/2}}$$

usando la regla de la cadena; obtenemos

$$g(f(s)) = s + \text{cte} \tag{3-54}$$

En tablas se encuentra, para $c > 0$, que

$$g(r) = \frac{1}{c^{1/2}} \ln \left[\frac{(3c-r)^{1/2} - (3c)^{1/2}}{(3c-r)^{1/2} + (3c)^{1/2}} \right]$$

cumple

$$g'(r) = \frac{\sqrt{3}}{r(3c-r)^{1/2}}$$

De manera que en (3-54) tendremos

$$\frac{1}{c^{1/2}} \ln \left[\frac{(3c-f(s))^{1/2} - (3c)^{1/2}}{(3c-f(s))^{1/2} + (3c)^{1/2}} \right] = s + \text{cte}$$

de donde debemos despejar $f(s)$

$$\frac{1}{c^{1/2}} \ln \left[A \frac{(3c-f(s))^{1/2} - (3c)^{1/2}}{(3c-f(s))^{1/2} + (3c)^{1/2}} \right] = s, \quad A(\text{cte})$$

$$e^{c^{1/2}s} = A \frac{(3c-f(s))^{1/2} - (3c)^{1/2}}{(3c-f(s))^{1/2} + (3c)^{1/2}}$$

$$(3c - f(s))^{1/2} \left[e^{\sqrt{c} s} - A \right] + (3c)^{1/2} \left[e^{\sqrt{c} s} + A \right] = 0$$

$$(3c - f(s)) = 3c \frac{(e^{\sqrt{c}s} + A)^2}{(e^{\sqrt{c}s} - A)^2}$$

$$f(s) = 3c \left[1 - \frac{(e^{\sqrt{c}s} + A)^2}{(e^{\sqrt{c}s} - A)^2} \right] = 3c \frac{-4A e^{\sqrt{c}s}}{(e^{\sqrt{c}s} - A)^2}$$

$$f(s) = -3Ac \frac{4}{\left[e^{\frac{1}{2}\sqrt{c}s} + A e^{-\frac{1}{2}\sqrt{c}s} \right]^2}$$

Si elegimos $A = -1$

$$f(s) = 3c \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{c} s \right] \rightarrow f(x-ct) = 3c \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{c} (x-ct) \right]$$

$$v(x,t) = f(x-ct) = 3c \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{c} (x-ct) \right] \quad (3-55)$$

La solución de (3-53) es entonces: $(u = -\frac{1}{2} v)$

$$u(x,t) = -\left(\frac{c}{2}\right) \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{c} (x-ct) \right]$$

Nótese que la amplitud y el ancho del pulso dependen de la velocidad c .

CAPITULO 4

SOLUCIONES ANALITICAS DE LA ECUACION DE KdV

1. COMO SOLUCIONAR LA ECUACION DE KdV
USANDO EL M.I.D.

1.1 Esquema General de Solución

El problema a resolver es:

Hallar la función $u: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga la ecuación

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (4-1)$$

sujeta a la condición inicial

$$u(x,0) = {}_0u(x)$$

donde ${}_0u: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función dada

Tal como fue propuesto en el Capítulo 2, empezaremos por interpretar la función $u: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ como una familia mono-paramétrica de funciones

$$\left\{ {}_\tau u: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tau \in \mathbb{R} / {}_\tau u(x) = u(x, \tau) \right\} \quad (4-2)$$

Y así, nuestro problema consiste en determinar las funciones ${}_\tau u$ a partir de ${}_0u$

A cada función ${}_\tau u$ la hacemos intervenir ahora como función potencial en la ecuación de Schrodinger estacionaria

$$-D^2f + {}_\tau uf = k^2f \quad (4-3)$$

la cual, para cada función ${}_\tau u$ (τ fijo), constituye un proble

ma de valores propios del operador $H_{(\tau)}$

$$H_{(\tau)} = -D^2 + \tau u \quad (4-4)$$

Como contamos con una familia monoparamétrica de funciones τu , a través de (4,4) estamos construyendo una familia monoparamétrica de operadores lineales. De acuerdo a (2-13), $\{H_{(\tau)}, \tau \in \mathbb{R}\}$ es una familia monoparamétrica de operadores equivalentes, es decir cada uno de sus elementos tienen los mismos valores propios.

Debemos imponer, ahora, algunas restricciones a las posibles soluciones u que esperamos obtener de (4-1). La primera de ellas es para asegurar que el M.I.D. sea aplicable, y esto está especificado en el teorema 1 (Cap. 1, pág. 14).

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2) |\tau u(x)| dx < \infty \quad (4-5)$$

esto debe ser válido para cada función τu (cada $\tau \in \mathbb{R}$) definida en (4-2). La segunda nos ha de facilitar el trabajo de calcular cómo varían los parámetros de dispersión con respecto a τ .

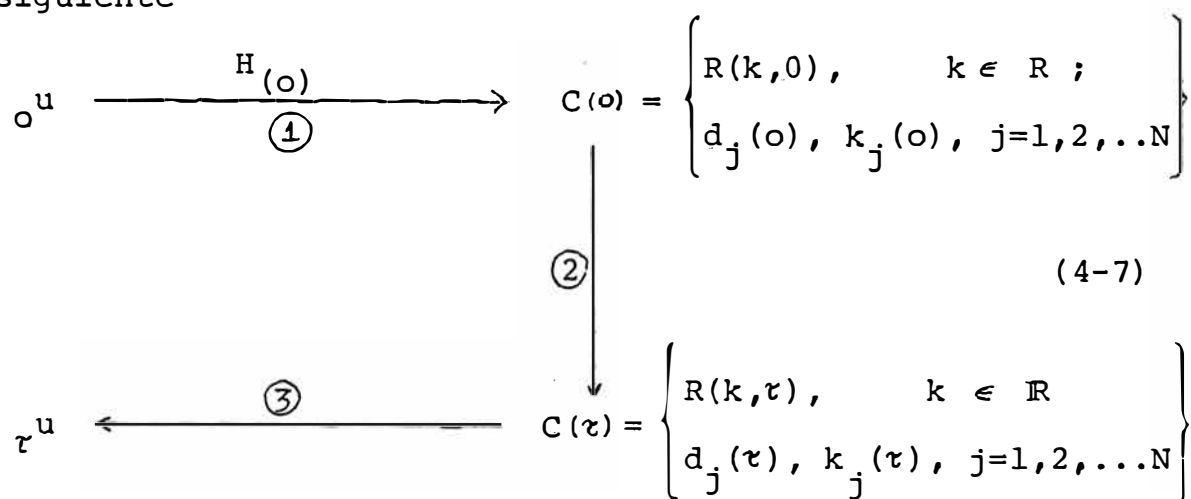
$$u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0 \quad (4-6)$$

según veremos más adelante.

En lo que respecta al M.I.D., en el capítulo denotábamos a los parámetros de dispersión con $C = \{ R(k), \kappa_j, d_j \}$, sin

necesidad de hacer referencia a la función potencial que intervenía en la ec. de Schrodinger, pues a lo largo del desarrollo del tema se usaba una sola función Q . Ahora, en cambio, tenemos una familia de potenciales y por ello usaremos $C(\tau) = \{R(k, \tau), d_j(\tau), k_j(\tau)\}$ para denotar a los parámetros de dispersión correspondientes al potencial τu .

Para la solución de (4-1) el esquema general a seguir es el siguiente



El paso indicado con $\textcircled{1}$ en el esquema (4-7), consiste en resolver la ecuación de Schrodinger estacionaria correspondiente al potencial ${}_0u$.

$$-D^2f + {}_0uf = k^2f \tag{4-8}$$

que constituye un problema de valores propios para el operador

$$H_{(0)}$$

$$H_{(0)}f = k^2f$$

(En el complemento A ofrecemos varios ejemplos de cómo resolverlo). En esta expresión conviene usar, en vez de f , la notación $Y_{(0,k)}$ para así hacer referencia que ella es una función propia del operador $H_{(0)}$ correspondiente al valor propio k^2 .

$$H_{(0)} Y_{(0,k)} = k^2 Y_{(0,k)} \quad , \quad k \in \mathbb{C} \quad (4-9)$$

La solución de (4-9) nos proporciona los parámetros de dispersión $C(o)$.

En principio, este paso ① es posible de llevarlo a cabo. Las dificultades dependerán del tipo de potencial u que se elija.

En lo que respecta al paso ③ el camino ya ha sido despejado en el Capítulo 1. Dados los parámetros de dispersión $C(\tau)$, todo lo que tenemos que hacer es reemplazarlos en (1-36) y resolver la ec. de Marchenko (1-37). La obtención de u dependerán de nuestra habilidad para resolver esta ecuación integral.

Ahora nuestra única incógnita es cómo llevar a cabo el paso ②.

1.2 Cómo evolucionan los parámetros de dispersión.-

• Determinemos los autovalores discretos $k_j(\tau)$.

Sea α_j un valor propio del operador $H_{(0)}$ para el cual su correspondiente función propia es de cuadrado integrable * . Se cumple que $a(\alpha_j, 0) = 0$, (Ver expresión C-13). Bajo la exigencia (4-5) sabemos que sólo hay un número finito de ellos. En el esquema (4-7) estamos denotando el valor α_j con $k_j(0)$.

Si β_j^2 es un valor propio de $H_{(\tau)}$ y su correspondiente función propia de cuadrado integrable, se cumple $a(\beta_j, \tau) = 0$. Tal valor β_j está siendo denotado con $k_j(\tau)$.

En el anexo 1, al final del presente Capítulo, demostramos que

$$a(\alpha_j, 0) = 0 \iff a(\alpha_j, \tau) = 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

o sea

$$k_j(\tau) = k_j(0) - k_j \tag{4-10}$$

• Determinación de $R(k, \tau)$, k real; y $d_j(\tau)$.

Las expresiones (1-27) y 1-35) indican

* $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de cuadrado integrable si $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$

$$R(k, \tau) = \frac{b(k, \tau)}{a(k, \tau)} \quad , \quad k \in \mathbb{R} ; \quad (4-11)$$

$$d_j(\tau) = \frac{b(k_j, \tau)}{i a'(k_j, \tau)} \quad , \quad k_j = i \eta_j \quad , \quad \eta_j > 0$$

$$j=1, 2, 3, \dots, N.$$

Nuestra tarea consiste, entonces, en determinar cómo evolucionan, con respecto a τ , los siguientes parámetros:

$$a(k, \tau) \quad \text{y} \quad b(k, \tau) \quad , \quad k \in \mathbb{C}$$

Ellos están definidos a través del comportamiento asintótico de la función de Jost $\phi_{(k, \tau)}$

$$\phi_{(k, \tau)}(x) = \begin{cases} a(k, \tau) \exp(-ikx) + b(k, \tau) \exp(ikx) & x \longrightarrow \infty \\ \exp(-ikx) & x \longrightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\text{Im}k \geq 0 \quad (4-12)$$

Cómo evolucionan las funciones propias de $H(\tau)$ está indicado en (2-13)

$$Y(k, \tau) = A Y(k, \tau) \quad , \quad A = -4(D^3 + bD + Db)$$

$$b = \frac{3}{4} \tau^u$$

(el punto indica derivada con respecto a τ)

Esta expresión es válida en toda región espacial, en particular para $|x| \longrightarrow \infty$. Teniendo en cuenta que

$$u, u_x \xrightarrow{|x| \longrightarrow \infty} 0 \quad (\text{es la exigencia hecha en (4-6)})$$

resulta que el comportamiento asintótico de las funciones propias de $H(\tau)$ está gobernado por

$$Y_{(k,\tau)} = -4D^3 Y_{(k,\tau)} \quad \text{en } |x| \longrightarrow \infty \quad (4-13)$$

Ahora, las funciones de Jost $\Phi_{(k,\tau)}$ son funciones propias normalizadas a tener el comportamiento $\exp(-ikx)$ en $x \longrightarrow -\infty$

Resulta que la función $\Phi_{(k,0)}$ evoluciona hacia $Y_{(k,\tau)} = U_{(\tau)} \Phi_{(k,0)}$

la cual no necesariamente esta normalizada y, en general, debemos considerar que

$$Y_{(k,\tau)} = h(k,\tau) \Phi_{(k,\tau)}, \quad Y_{(k,0)} = \Phi_{(k,0)} \quad (4-14)$$

$$\text{Im}k \geq 0$$

o Para la región $x \longrightarrow -\infty$

$$Y_{(k,\tau)}(x) = h(k,\tau) \exp(-ikx)$$

Reemplazando esta expresión en (4-14), da lugar a una ecuación para $h(k,\tau)$ cuya solución es

$$h(k,\tau) = \exp(-4ik^3\tau) \quad (4-15)$$

o Para la región $x \longrightarrow \infty$

$$Y_{(k,\tau)}(x) = h(k,\tau) [a(k,\tau) \exp(-ikx) + b(k,\tau) \exp(ikx)]$$

Al reemplazar esta expresión en (4-13) resulta

$$\begin{aligned} a(k, \tau) &= a(k, 0) \\ b(k, \tau) &= b(k, 0) \exp(8ik^3 \tau) \end{aligned} \quad , \operatorname{Im} k \geq 0 \quad (4-16)$$

Con este resultado, las expresiones (4-10) y (4-11) nos indican que

$$C(\tau) = \begin{cases} R(k, \tau) = R(k, 0) \exp(8ik^3 \tau) & , k \in \mathbb{R} \\ d_j(\tau) = d_j(0) \exp(8ik_j^3 \tau) & , k_j = i\eta_j \\ k_j(\tau) = k_j(0) \equiv k_j & , j = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (4-17)$$

De esta forma, el esquema (4-7) queda expedito para su aplicación.

Antes de finalizar esta sección queremos complementar el esquema (4-7), para tener una idea global de nuestros procedimientos

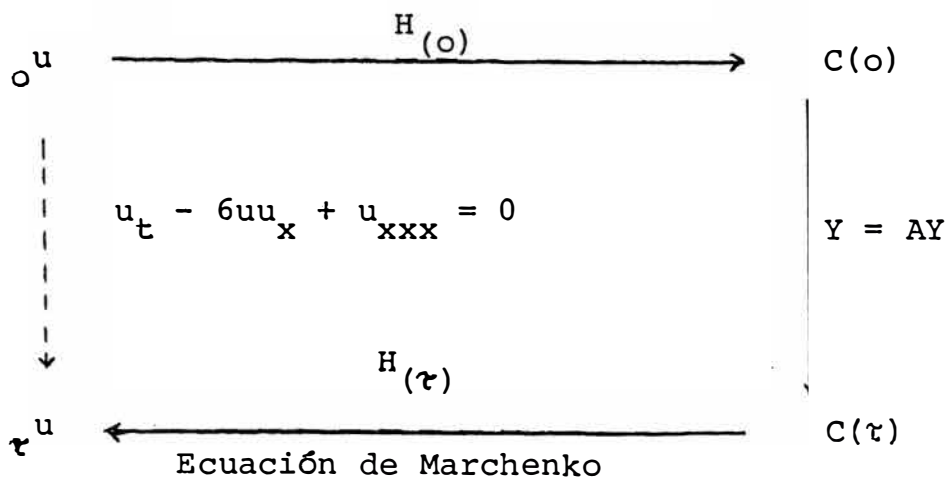


Fig. 1. Mientras que la evolución de u_0 hacia u_τ está go

bernada por la ec. de KdV $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ ($u(x) = u(x, \tau)$), la evolución de los parámetros de dispersion, de $C(0)$ hacia $C(\tau)$, está gobernada por una ecuación mucho más simple: $\dot{Y}(\tau) = A(\tau) Y(\tau)$, $A(\tau) = -4D^3$ en $|x| \rightarrow \infty$. (Las funciones $Y(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, son funciones propias de $H(\tau)$; la relación de $A(\tau)$ y $H(\tau)$ con la ec. de KdV es a través de la ec. de operadores $\dot{H}(\tau) = \{A(\tau), H(\tau)\}$, $H(\tau) = -D^2 + \hat{u}$)

2. OBTENCION DE LOS SOLITONES DE LA EC. DE KdV

Al resolver la ec. de Schrodinger

$$\{-D^2 + \hat{Q}_n\} k^Y = k^2 k^Y$$

usando como potencial la función Q_n (n fijo)

$$Q_n(x) = -n(n+1)\alpha^2 \operatorname{sech}^2 \alpha x \quad n=1,2,\dots \quad (4-18)$$

se obtiene el siguiente resultado

- El coeficiente de reflexión es nulo: toda onda incidente de energía $k^2 > 0$ atraviesa la zona de interacción sin sufrir reflexión alguna, $R(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$
- El número de estados ligados es n

(En el complemento A se ofrece la demostración)

Otro resultado interesante, que lo verificaremos para dos casos particulares, es el siguiente:

La función u que satisface la ec. de KdV

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

sujeta a la condición inicial

$$u(x,0) = Q_n(x)$$

describe n solitones en interacción.

¡Un solitón por cada estado ligado que le corresponde al potencial Q_n !

2.1 Ejemplo 1.

Elegimos en (4-18) el potencial transparente correspondiente a $n = 1$, como condición inicial de la ec. de KdV:

$$u(x,0) = -2\alpha^2 \operatorname{sech}^2 \alpha x, \quad \alpha > 0 \text{ es valor fijo} \quad (4-19)$$

- ① Los resultados (A-47) y (A-48) indican que a este potencial le corresponde sólo un estado ligado ($N=1$) y que los parámetros de dispersión $C(0)$ a los que da lugar son

$$C(0) = \left\{ k_1 = i\alpha; \quad d_1(0) = 2\alpha \quad R(k,0) = 0, \forall k \in \mathbb{R} \right\} \quad (4-20)$$

- ② De acuerdo a (4-17)

$$C(\tau) = \left\{ k_1 = i\alpha; \quad d_1(\tau) = 2\alpha \exp(8\alpha^3 \tau); \quad R(k,\tau) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R} \right\} \quad (4-21)$$

- ③ Solucionamos la ec. integral de Marchenko

Con los parámetros $C(\tau)$ construimos la correspondiente función Ω según se indica en (1-36)

$$\Omega(x, \tau) = 2\alpha \exp(8\alpha^3\tau) \exp(-\alpha x)$$

reemplazándola en (1-37), la ec. integral a resolver resulta ser

$$2\alpha \exp(8\alpha^3\tau) \exp(-\alpha(x+y)) + K(x, y, \tau) + \int_x^\infty K(x, s, \tau) 2\alpha \exp(8\alpha^3\tau) \exp(-\alpha(y+s)) ds \quad (4-22)$$

$$2 \exp(8\alpha^3\tau - \alpha x) \exp(-\alpha y) + K(x, y, \tau) + \exp(-\alpha y) \int_x^\infty K(x, s, \tau) 2 \exp(8\alpha^3\tau - \alpha s) ds = 0$$

La forma como aparece la variable y en la ec. sugiere plantear

$$K(x, y, \tau) = L(x, \tau) \exp(-\alpha y)$$

obteniendo una ecuación para L

$$2\alpha \exp(8\alpha^3\tau) \exp(-\alpha x) + L(x, \tau) + \int_x^\infty L(x, \tau) 2\alpha \exp(8\alpha^3\tau) \exp(-2\alpha s) ds = 0$$

$$2\alpha \exp(8\alpha^3\tau) \exp(-\alpha x) + L(x, \tau) + \exp(8\alpha^3\tau) \exp(-2\alpha x) L(x, \tau) = 0$$

$$L(x, \tau) = -\alpha \exp(4\alpha^3\tau) \operatorname{Sech}(\alpha x - 4\alpha^3\tau)$$

y así :

$$K(x, y, \tau) = -\alpha \exp(4\alpha^3\tau) \exp(-\alpha y) \operatorname{Sech}(\alpha x - 4\alpha^3\tau) \quad (4-23)$$

Finalmente se proceda a obtener $u(x, \tau)$

En (4-19) evaluamos $k(x, x, \tau)$

$$K(x, x, \tau) = -\alpha \exp(4\alpha^3\tau) \exp(-\alpha x) \operatorname{Sech}(\alpha x - 4\alpha^3\tau)$$

y, de acuerdo a (1-10), resulta que,

$$u(x, \tau) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x, \tau) = -2\alpha^2 \operatorname{sech}^2(\alpha x - 4\alpha^3 \tau)$$

En conclusión

$$u(x, 0) = -2\alpha^2 \operatorname{sech}^2 \alpha x \xrightarrow[\text{(según la ec. de KdV)}]{\text{Evoluciona hacia}} u(x, t) = -2\alpha^2 \operatorname{sech}^2 \alpha (x - 4\alpha^2 t)$$

(4-24)

2.2 Ejemplo 2.-

Elegimos en (4-18) el potencial transparente correspondiente a $n = 2$, como condición inicial de la ec. de KdV

$$u(x, 0) = -6\alpha^2 \operatorname{sech}^2 \alpha x \quad (4-25)$$

- ① En el complemento A, se muestra que a este potencial le corresponde sólo 2 estados ligados y las expresiones (A-54) (A-55, 56) indican que los parámetros de dispersión $C(0)$ están dados por

$$C(0) = \begin{cases} k_1 = i\alpha & d_1(0) = 6\alpha & R(k, 0) = 0 \\ k_2 = i2\alpha & d_2(0) = 12\alpha & \forall k \text{ real} \end{cases} \quad (4-26)$$

- ② De acuerdo a (4-17)

$$C(\tau) = \begin{cases} k_1 = i\alpha & d_1(\tau) = 6\alpha \exp(8\alpha^3 \tau) & R(k, \tau) = 0 \\ k_2 = i2\alpha & d_2(\tau) = 12\alpha \exp(64\alpha^3 \tau) & \forall k \text{ real} \end{cases}$$

③ En (1 - 37)

$$\left\{ 6\alpha \exp(8\alpha^3\tau) \exp[-\alpha(x+y)] + 12\alpha \exp(64\alpha^3\tau) \exp[-2\alpha(x+y)] \right\} + K(x,y,\tau) + \int_x^\infty K(x,s,\tau) \left\{ 6\alpha \exp(8\alpha^3\tau) \exp[-\alpha(x+y)] + 12\alpha \exp(64\alpha^3\tau) \exp[-2\alpha(s+y)] \right\} ds = 0$$

para $y \gg x$

El procedimiento para obtener la solución lo indicamos en el anexo 2 (al final del presente capítulo). El resultado indicado en (4-55) es

$$K(x,y,\tau) = -6\alpha \frac{N}{D} \quad \left| \quad (4-27) \right.$$

donde

$$N = \exp(4\alpha^3\tau - \alpha y) \operatorname{Senh}(2\alpha x - 32\alpha^3\tau) + 2 \exp(32\alpha^3\tau - 2\alpha y) \operatorname{Cosh}(\alpha x - 4\alpha^3\tau)$$

$$D = \operatorname{Cosh}(3\alpha x - 36\alpha^3\tau) + 3 \operatorname{Cosh}(\alpha x - 28\alpha^3\tau)$$

evaluamos K en (x,x,τ)

y manteniendo τ fijo calculamos

$$u(x,\tau) = -2 \frac{d}{dx} K(x,x,\tau)$$

la derivación resulta laboriosa y la mostramos en el anexo

El resultado, expresado en (4-56), es

$$u(x,\tau) = -12\alpha^2 \frac{\operatorname{Cosh}(4\alpha x - 64\alpha^3\tau) + 4\operatorname{Cosh}(2\alpha x - 8\alpha^3\tau) + 3}{\left[\operatorname{Cosh}(3\alpha x - 36\alpha^3\tau) + 3\operatorname{Cosh}(\alpha x - 28\alpha^3\tau) \right]^2} \quad (4-28)$$

Verifiquemos si (4-28) satisface la condición inicial.

Para $\tau = 0$ tenemos

$$u(x,0) = -12\alpha^2 \frac{\cosh 4\alpha x + 4\cosh 2\alpha x + 3}{[\cosh(3\alpha x) + 3\cosh \alpha x]^2}$$

usando las identidades

$$4\cosh^3 x = \cosh(3x) + 3\cosh(x)$$

$$8\cosh^4 x = \cosh(4x) + 4\cosh(2x) + 3$$

resulta

$$u(x,0) = -12\alpha^2 \frac{8\cosh^4 \alpha x}{(4\cosh^3 \alpha x)^2} = -6\alpha^2 \operatorname{sech}^2 \alpha x$$

que es lo exigido en (4-25)

En conclusión

$$u(x,0) = -6\alpha^2 \operatorname{sech}^2 \alpha x$$

evoluciona hacia

$$u(x,t) = -12\alpha^2 \frac{\cosh(4\alpha x - 64\alpha^3 t) + 4\cosh(2\alpha x - 8\alpha^3 t)}{[\cosh(3\alpha x - 36\alpha^3 t) + 3\cosh(\alpha x - 28\alpha^3 t)]^2}$$

(4-29)

Queremos ahora averiguar si la solución dada en (4-29) describe solitones en interacción. Si así fuera ¿Qué forma y velocidad tienen? Un criterio que, nos parece, guía la forma cómo identificarlos consiste en tener en cuenta cómo evoluciona el comportamiento asintótico de la función de Jost

que describe un estado ligado. Teniendo en cuenta (4-12) y (4-15), la expresión (4-14) nos indica que

$$Y(k_j, \tau)(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \exp[\eta_j(x - 4\eta_j^2\tau)] ; \quad (4-30)$$

$$k_j = i\eta_j, \quad v_j \equiv 4\eta_j^2$$

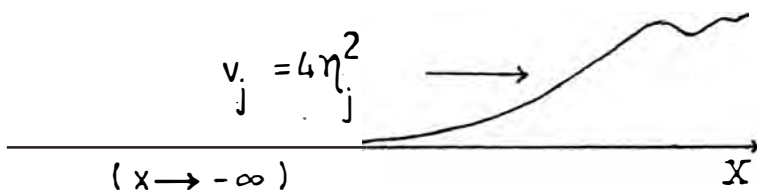


Fig. 2. Esquema para indicar que la forma asintótica de la función que describe el j-ésimo estado ligado "avanza con velocidad $v_j = 4\eta_j^2$ "

INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS Y TECNOLÓGICAS

Recordemos que $|x| \rightarrow \infty$ significa que estamos en la región espacial donde el valor del potencial $u(x)$ vale casi cero.

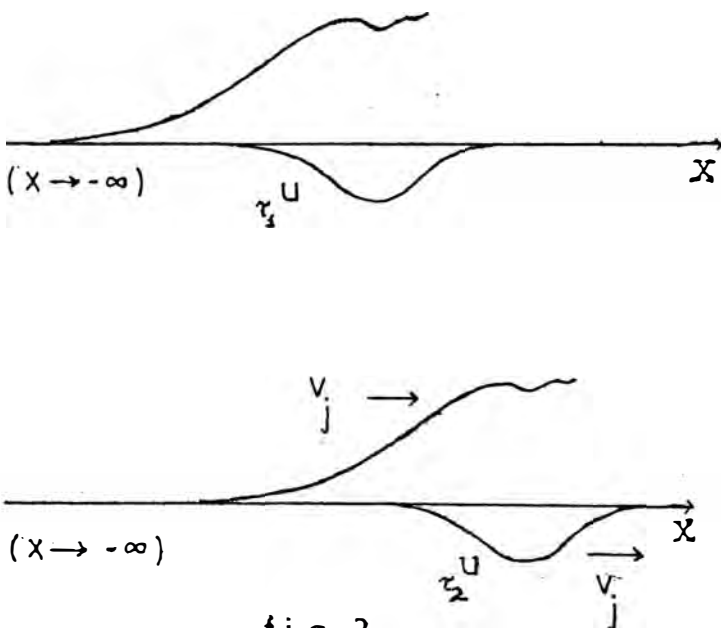


fig. 3

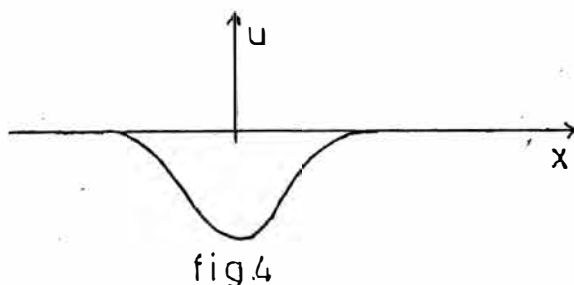
Si el comportamiento asintótico está evolucionando de la manera como se indica en la fig. (2), con velocidad $4\eta_j^2$, será quizás a consecuencia que el potencial está evolucionando a la misma velocidad. Esquemáticamente lo mostramos en la Fig. 3

Como los autovalores k_j^2 no cambian al variar τ , y para $u(x,0)$, le corresponden 2 estados ligados (según lo indica 4-26), sugerimos que

la expresión para $u(x, \tau)$, dada en (4-29), posiblemente describa la interacción de dos ondas las cuales al emerger de la zona de interacción la hacen con velocidades indicadas en (4-30), $v_1 = 4\eta_1^2$ y $v_2 = 4\eta_2^2$ respectivamente (según 4-26: $\eta_1 = \alpha$, $\eta_2 = 2\alpha$)

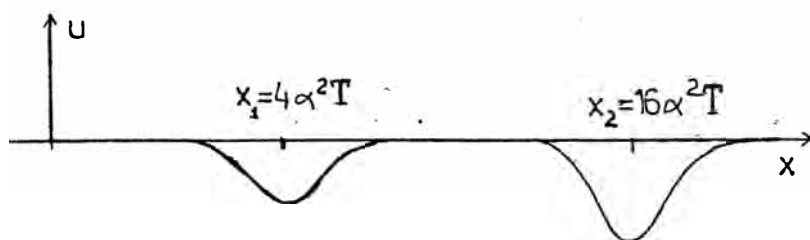
Verifiquemos si es cierto

Cuando $t=0$, $u(x,0) = 2\text{Sech}^2 \alpha x$, se tiene un perfil como el



indicado en la fig. 4. Suponemos que aquí se tienen dos solitones superpuestos no linealmente. Si nuestra predicción fuese cierta, entonces

para un valor de $t = T$ suficientemente grande como para que los pulsos estén separados, la función u debe adoptar una



forma aproximada a la de la fig.5

fig.5

Halleemos la forma de (4-29) en una región vecina a $x_1 = 4\alpha^2 T$. (T es un valor real positivo suficientemente grande).

Por "T suficientemente grande" entendemos

$$\text{como aquel valor para el cual } \exp(-\alpha^2 T) \approx 0 \quad (4-31)$$

Para analizar la forma $u(x, t)$ en la región vecina a $x_1 = 4\alpha^2 T$ al tomar un T suficientemente grande mantendremos los términos en que aparezca $\xi_1 = x - 4\alpha^2 T$ (Los siguientes cálculos son para obtener 4-33).

En (4-29)

$$u(x, t) = -12\alpha^2 N / D^2 \quad (4-32)$$

$$\begin{aligned} N &= \text{Cosh} [4\alpha(x - 16\alpha^2 t)] + 4\text{Cosh} [2\alpha(x - 4\alpha^3 t)] + 3 \\ &= \text{Cosh} [4\alpha(\xi_1 - 12\alpha^2 t)] + 4\text{Cosh}(2\alpha\xi_1) + 3, \quad \xi_1 = x - 4\alpha^2 t \\ &= \frac{1}{2} [\exp(4\alpha\xi_1) \exp(-48\alpha^3 t) + \exp(-4\alpha\xi_1) \exp(48\alpha^3 t)] + 4\text{Cosh}(2\alpha\xi_1) + 3 \end{aligned}$$

$$N \xrightarrow[t \rightarrow T]{} \frac{1}{2} \exp(48\alpha^3 T) \exp(-4\alpha\xi_1)$$

$$\begin{aligned} D &= \text{Cosh} [3\alpha(x - 12\alpha^2 t)] + 3\text{Cosh}[\alpha(x - 28\alpha^2 t)] \\ &= \text{Cosh} [3\alpha(\xi_1 - 8\alpha^2 t)] + 3\text{Cosh}[\alpha(\xi_1 - 24\alpha^2 t)] \\ &= \frac{1}{2} [\exp(3\alpha\xi_1 - 24\alpha^2 t) + \exp(24\alpha^2 t - 3\alpha\xi_1)] + \\ &\quad + \left[\frac{3}{2} \exp(\alpha\xi_1 - 24\alpha^3 t) + \exp(24\alpha^3 t - \alpha\xi_1) \right] \end{aligned}$$

cuando $t \rightarrow T$

$$D \rightarrow \frac{1}{2} \exp(24\alpha^2 t - 3\alpha \xi_1) + \frac{3}{2} \exp(24\alpha^3 t - \alpha \xi_1)$$

$$= \frac{1}{2} \exp(24\alpha^2 t - 3\alpha \xi_1) [1 + 3 \exp(2\alpha \xi_1)]$$

$$D^2 \rightarrow \frac{1}{4} \exp(48\alpha^2 t - 6\alpha \xi_1) [1 + 3 \exp(2\alpha \xi_1)]^2$$

Luego

$$\frac{N}{D^2} \xrightarrow{t \rightarrow T} \frac{3 \exp(2\alpha \xi_1)}{[1 + 3 \exp(2\alpha \xi_1)]^2}$$

a fin de llevarla a la forma Sech^2 , elegimos δ_1 tal que $3 = \exp(2\alpha \delta_1)$

$$= \frac{2}{3} \frac{\exp 2\alpha (\xi_1 + \delta_1)}{[1 + \exp 2\alpha (\xi_1 + \delta_1)]^2} = \frac{2}{3} \frac{1}{\{\exp [\alpha (\xi_1 + \delta_1)] + \exp [-\alpha (\xi_1 + \delta_1)]\}^2}$$

$$= \frac{1}{6} \text{Sech}^2 \alpha (x - 4\alpha^2 T + \delta_1) \quad (4-33)$$

Por lo tanto, en (4-32)

$$u(x, t) = -2\alpha^2 \text{Sech}^2 [\alpha (x - 4\alpha^2 t + \delta_1)] \quad (4-34)$$

Este es el comportamiento de la solución 4-29, para valores de x pertenecientes de una región vecina a $x_1 = 4\alpha^2 T$ y valores de $t > T$. El valor de $T > 0$ está especificado en (4-31) y $\delta_1 = (\ln 3)/2\alpha$.

En forma similar se obtiene

$$u(x,t) = -2\alpha^2 \operatorname{sech}^2[\alpha(x - 4\alpha^2 t - \delta_1)] \quad (4-35)$$

para x en una vecindad de $x_1' = 4\alpha^2 T'$

y valores de $t < T'$ ($T' = -T$)

En las expresiones (4-34) y (4-35) nótese la diferencia en el signo que precede a δ_1 , podríamos decir que se trata del mismo pulso excepto que hay un desfase. Ello posiblemente ha ocurrido como consecuencia de su interacción con otra onda, la cual, de acuerdo a nuestra suposición * , en el instante $t = T$ esperamos encontrarla localizada en una región vecina a $x_2 = 16\alpha^2 T$. El procedimiento a seguir para verificarlo, es semejante al que hemos hecho para obtener 4-34. El resultado es

$$u(x,t) = -8\alpha^2 \operatorname{sech}^2 2\alpha(x - 16\alpha^2 t - \delta_2) \quad (4-36)$$

para x en una vecindad de $x_2 = 16\alpha^2 T$

y valores de $t > T$

El valor de T está especificado en (4-31)

$$\delta_2 = \delta_1/2 = (\ln 3)/4\alpha$$

También

$$u(x,t) = -8\alpha^2 \operatorname{sech}^2 2\alpha(x - 16\alpha^2 t + \delta_2) \quad (4-37)$$

para x en una vecindad de

$x_2 = 16\alpha^2 T'$ ($T' = -T$) y valores de $t < T'$

* ver pag 131

Es usual presentar los resultados (4-34,35,36 y 37) en la forma siguiente:

$$u(x,t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} -2\alpha^2 \operatorname{sech}^2 \alpha(x-4\alpha^2 t - \delta_1) - 8\alpha^2 \operatorname{sech}^2 2\alpha(x-16\alpha^2 t + \frac{\delta_1}{2})$$

$$u(x,t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} -2\alpha^2 \operatorname{sech}^2 \alpha(x-4\alpha^2 t + \delta_1) - 8\alpha^2 \operatorname{sech}^2 2\alpha(x-16\alpha^2 t - \frac{\delta_1}{2})$$

donde $\delta_1 = \frac{\ln 3}{2\alpha}$

Nótese que

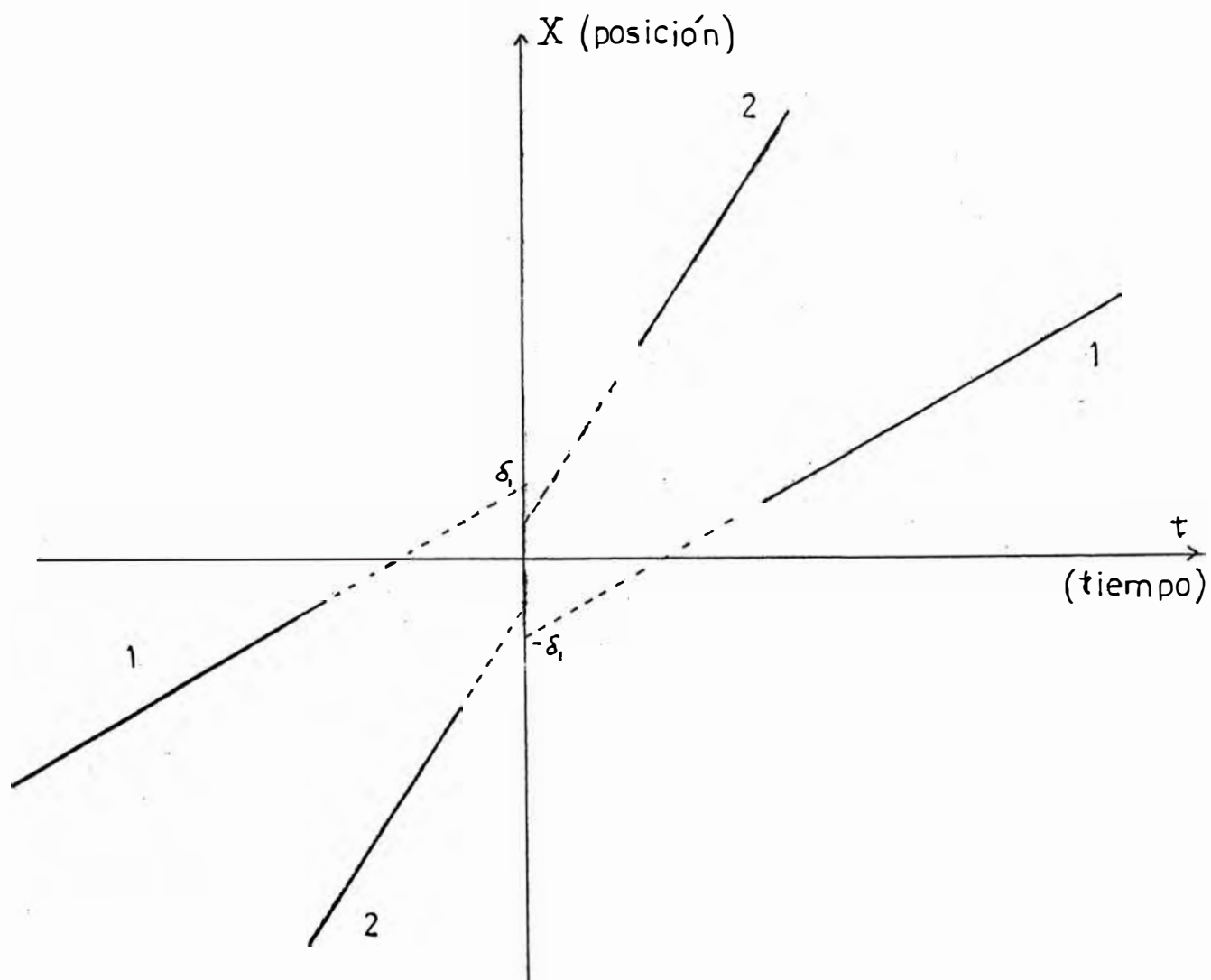
• Las ondas en interacción han resultado ser SOLITONES del mismo tipo, numéricamente cumplen*

$$\text{amplitud} = \frac{\text{velocidad}}{2}, \quad \text{ancho} = \frac{2}{(\text{velocidad})^{1/2}}$$

• El efecto neto de su interacción mutua es un simple corrimiento de fase. Después de la interacción el solitón más lento está retrasado con respecto a la posición que tendría en caso de no haber habido interacción. En cambio el solitón más rápido está adelantado.

Grafiquemos la posición de los máximos de cada solitón en cada instante de tiempo:

* Para $f(x) = \operatorname{sech}^2(ax)$, el ancho de este perfil está siendo indicado por: ancho = $(1/a)$



ANEXO 1

1. Consideremos que α_j , $j=1,2,3,\dots,N$, sean los autovalores discretos del operador $H_{(0)}$ para los cuales su correspondiente función propia $Y_{(\alpha_j,0)}$ satisface $\int_{-\infty}^{\infty} |Y_{(\alpha_j,0)}(x)|^2 dx$ *

El resultado (C-13) indica que

$$a(\alpha_j,0) = 0 \quad j=1, 2, 3, \dots, N. \quad (4-38)$$

Usando la propiedad que $\{H_{(\tau)}\}$ es una familia de operadores equivalentes ($H_{(\tau)} = U_{(\tau)} H_{(0)} U_{(\tau)}^{-1}$) resulta que $U_{(\tau)} Y_{(\alpha_j,0)}$ es función propia de $H_{(\tau)}$ correspondiente al mismo autovalor α_j (ver diagrama en la fig. 2, Cap. 2). La función $Y_{(\alpha_j,\tau)} = U_{(\tau)} Y_{(\alpha_j,0)}$ cumple $\int_{-\infty}^{\infty} |Y_{(\alpha_j,\tau)}(x)|^2 dx$?

Para averiguarlo usaremos (2-13), la cual indica cómo evolucionan las funciones propias con respecto a τ

$$\dot{Y}_{(\alpha_j,\tau)} = AY_{(\alpha_j,\tau)} \quad , \quad Y_{(\alpha_j,\tau)} = U_{(\tau)} Y_{(\alpha_j,0)}$$

Sea

$$I_j(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |Y_{(\alpha_j,\tau)}(x)|^2 dx = \langle Y_{(\alpha_j,\tau)}, Y_{(\alpha_j,\tau)} \rangle \quad (4-39)$$

* Una función que satisface esta propiedad se dice que es de cuadrado integrable.

(los corchetes denotan producto interno). Derivamos con respecto a τ

$$\begin{aligned} \dot{I}_j(\tau) &= \langle \dot{Y}_{(\alpha_j, \tau)}, Y_{(\alpha_j, \tau)} \rangle + \langle Y_{(\alpha_j, \tau)}, \dot{Y}_{(\alpha_j, \tau)} \rangle \\ &= \langle A Y_{(\alpha_j, \tau)}, Y_{(\alpha_j, \tau)} \rangle + \langle Y_{(\alpha_j, \tau)}, A Y_{(\alpha_j, \tau)} \rangle \end{aligned}$$

pero resulta que el operador A , actuando sobre el espacio de las funciones de cuadrado integrable resulta ser antiadjunto*

Luego

$$\dot{I}_j(\tau) = \langle A Y_{(\alpha_j, \tau)}, Y_{(\alpha_j, \tau)} \rangle + \langle -A Y_{(\alpha_j, \tau)}, Y_{(\alpha_j, \tau)} \rangle = 0$$

$$I_j(\tau) = \text{cte}, \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \quad (4-40)$$

Como $I_j(0) < \infty$ entonces $I_j(\tau) < \infty$

Así la función $Y_{(\alpha_j, 0)}$ que describe un estado ligado evoluciona hacia la función $Y_{(\alpha_j, \tau)} = U(\tau) Y_{(\alpha_j, 0)}$ que describe también un estado ligado. El resultado (C-13) indica que

$$a(\alpha_j, \tau) = 0 \quad (4-41)$$

De (1) y (4)

$$a(\alpha_j, 0) \implies a(\alpha_j, \tau) = 0, \quad \tau \in \mathbb{R} \quad (4-42)$$

* Según (2-13) $A = -4(D^3 + bD + Db)$, donde b es una función $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Integrando por partes se demuestra $(g, Af) = -(Ag, f)$

En general, como en (2-13) los operadores $H_{(\tau)}$ son autoadjuntos y $A(\tau)$, actuando sobre las funciones de cuadrado integrable, es antiadjunto se cumple:

funciones propias que describen estados ligados evolucionan hacia funciones que también describen estados ligados. (4-43)

Prueba:

Nuestras hipótesis: $H_{(\tau)} = U_{(\tau)} H_{(0)} U_{(\tau)}^{-1}$, $H_{(\tau)}^+ = H_{(\tau)}$,

$$\dot{U}_{(\tau)} = A_{(\tau)} U_{(\tau)}$$

• Mostremos que $UU^+ = U^+U = I$

$$\dot{U}_{(\tau)} \approx \frac{U_{(\tau+h)} - U_{(\tau)}}{h} \rightarrow (\dot{U}_{(\tau)})^+ = \frac{U_{(\tau+h)}^+ - U_{(\tau)}^+}{h} \approx (U_{(\tau)}^+)^{\cdot}$$

$$(\dot{U})^+ = (U^+)^{\cdot} \quad (i)$$

$$U = AU \quad (\dot{U})^+ = U^+ A^+ = -U^+ A$$

usando (i)

$$(U^+)^{\cdot} = -U^+ A \quad (ii)$$

Calculemos $(U^+U)^{\cdot}$

$$(U^+U)^{\cdot} = (U^+)^{\cdot} U + U^+ \dot{U} = (U^+)^{\cdot} U + U^+ AU$$

usando (ii)

$$(U^+U)' = -U^+AU + U^+AU = 0$$

luego

$$U^+(\tau) U(\tau) = \text{cte}, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

como $U(0) = I$, entonces $U^+(\tau) U(\tau) = I$. Así $U^+(\tau) = U^{-1}(\tau)$

Luego

$$U^+(\tau) U(\tau) = U(\tau) U^+(\tau) = I \tag{4-44}$$

• Sea $\langle Y(\alpha_j, 0), Y(\alpha_j, 0) \rangle < \infty$

$Y(\alpha_j, 0)$ evoluciona hacia $Y(\alpha_j, \tau) = U(\tau) Y(\alpha_j, 0)$. Se cumple

$$\begin{aligned} \langle Y(\alpha_j, \tau), Y(\alpha_j, \tau) \rangle &= U(\tau) Y(\alpha_j, 0), U(\tau) Y(\alpha_j, 0) \\ &= U^+(\tau) U(\tau) Y(\alpha_j, 0), Y(\alpha_j, 0) \\ &= Y(\alpha_j, 0), Y(\alpha_j, 0) \end{aligned} \tag{4-45}$$

• Sea $\langle Y(\beta_j, \tau), Y(\beta_j, \tau) \rangle < \infty$

$Y(\beta_j, \tau)$ "evoluciona" hacia $U^{-1}(\tau) Y(\beta_j, \tau)$ la cual es una fun-

ción propia de $H_{(0)}$ con autovalor β_j (ver diagrama de la fig. 2, Cap. 2). Se cumple que

$$\begin{aligned}
 U_{(\tau)}^{-1} Y(\beta_j, \tau), U_{(\tau)}^{-1} Y(\beta_j, \tau) &= \langle U_{(\tau)}^+ Y(\beta_j, \tau), U_{(\tau)}^+ Y(\beta_j, \tau) \rangle \\
 &= U_{(\tau)} U_{(\tau)}^+ Y(\beta_j, \tau), Y(\beta_j, \tau) \\
 &= \langle Y(\beta_j, \tau), Y(\beta_j, \tau) \rangle < \infty \quad (4-46)
 \end{aligned}$$

Los resultados (4-45) y (4-46) constituyen la prueba de (4-43) Además el recíproco de (4-42) también es válido.

$$a(\alpha_j, 0) = 0 \iff a(\alpha_j, \tau) = 0 \quad (4-47)$$

ANEXO 2

En la pag 128 tenemos la siguiente ec. integral.

$$\left[6\alpha e^{8\alpha^3\tau} e^{-\alpha(x+y)} + 12 e^{64\alpha^3\tau} e^{-2\alpha(x+y)} \right] + K(x,y,\tau) + \int_x^\infty K(x,s,\tau) \left[6\alpha e^{8\alpha^3\tau} e^{-\alpha(s+y)} + 12\alpha e^{64\alpha^3\tau} e^{-2\alpha(s+y)} \right] ds$$

conviene expresarla en la siguiente forma

$$6\alpha \exp(8\alpha^3\tau - \alpha y) \exp(-\alpha x) + \exp(-\alpha y) \int_x^\infty 6\alpha \exp(8\alpha^3\tau - \alpha s) K(x,s,\tau) ds +$$

$$+ 12\alpha \exp(64\alpha^3\tau - 2\alpha y) \exp(-2\alpha x) + \exp(-2\alpha y) \int_x^\infty 12\alpha \exp(64\alpha^3\tau - 2\alpha s) K(x,s,\tau) ds +$$

$$+ K(x,y,\tau) = 0 \tag{4-49}$$

lo cual sugiere plantear una solución del tipo

$$K(x,y,\tau) = c_1 \exp(-\alpha y) L_1(x) + c_2 \exp(-2\alpha y) L_2(x) \tag{4-50}$$

$$\text{con } c_1 = 6\alpha \exp(8\alpha^3\tau), \quad c_2 = 12\alpha \exp(64\alpha^3\tau)$$

reemplazamos (4-50) en (4-49) y se obtiene

$$\left[C_1 \frac{\exp(-2\alpha x)}{2\alpha} + 1 \right] L_1(x) + \left[C_2 \frac{\exp(-3\alpha x)}{3\alpha} \right] L_2(x) = -\exp(-\alpha x)$$

$$\left[C_1 \frac{\exp(-3\alpha x)}{3\alpha} \right] L_1(x) + \left[C_2 \frac{\exp(-4\alpha x)}{4\alpha} \right] L_2(x) = -\exp(-2\alpha x)$$

y así

$$L_1(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad L_2(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad (4-51)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta &= \left[C_1 \frac{\exp(-2\alpha x)}{2\alpha} + 1 \right] \left[C_2 \frac{\exp(-4\alpha x)}{4\alpha} + 1 \right] - \left[C_2 \frac{\exp(-3\alpha x)}{3\alpha} \right] \left[C_1 \frac{\exp(-3\alpha x)}{3\alpha} \right] \\ &= 2 \exp(36\alpha^3\tau - 3\alpha x) \left[\text{Cosh}(3\alpha x - 36\alpha^3\tau) + 3 \text{Cosh}(\alpha x - 28\alpha^3\tau) \right]. \end{aligned} \quad (4-52)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\exp(-\alpha x) & C_2 \frac{\exp(-3\alpha x)}{3\alpha} \\ -\exp(-2\alpha x) & C_2 \frac{\exp(-4\alpha x)}{4\alpha} + 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \exp(32\alpha^3\tau - 3\alpha x) \sinh(2\alpha x - 32\alpha^3\tau). \quad (4-53)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} C_1 \frac{\exp(-2\alpha x)}{2\alpha} + 1 & -\exp(-\alpha x) \\ C_1 \frac{\exp(-3\alpha x)}{3\alpha} & -\exp(-2\alpha x) \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_2 = -2 \exp(4\alpha^3\tau - 3\alpha x) \text{Cosh}(\alpha x - 4\alpha^3\tau) \quad (4-54)$$

Reemplazamos (4-52) y (4-53) en (4-51)

$$L_1(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\exp(-4\alpha^3\tau) \frac{\text{Senh}(2\alpha x - 32\alpha^3\tau)}{\text{Cosh}(3\alpha x - 36\alpha^3\tau) + 3\text{Cosh}(\alpha x - 28\alpha^3\tau)}$$

reemplazamos (4-52) y (4-54) en (4-51)

$$L_2(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\exp(-32\alpha^3\tau) \frac{\text{Cosh}(\alpha x - 4\alpha^3\tau)}{\text{Cosh}(3\alpha x - 36\alpha^3\tau) + 3\text{Cosh}(\alpha x - 28\alpha^3\tau)}$$

Finalmente, en (4-50) obtenemos el siguiente resultado

$$K(x, y, \tau) = -6\alpha \frac{N}{D} \quad (4-55)$$

donde

$$\begin{aligned} N &= \exp(4\alpha^3\tau - \alpha y) \text{Senh}(2\alpha x - 32\alpha^3\tau) + \\ &\quad + 2 \exp(32\alpha^3\tau - 2\alpha y) \text{Cosh}(\alpha x - 4\alpha^3\tau) \\ D &= \text{Cosh}(3\alpha x - 36\alpha^3\tau) + 3\text{Cosh}(\alpha x - 28\alpha^3\tau) \end{aligned}$$

ANEXO 3

En (4-27) evaluamos K en (x,x,τ)

$$K(x, x, \tau) = -3\alpha \frac{2\cosh(\alpha x - 28\alpha^3\tau) + e^{-\alpha x + 28\alpha^3\tau} + e^{-3\alpha x + 36\alpha^3\tau}}{\cosh(3\alpha x - 36\alpha^3\tau) + 3\cosh(\alpha x - 28\alpha^3\tau)}$$

Sea $A = 3\alpha x - 36\alpha^3\tau$, $B = \alpha x - 28\alpha^3\tau$

$$K(x, x, \tau) = -3\alpha \frac{2\cosh B + \frac{\exp(-B) + \exp(-A)}{3}\cosh B}{\cosh A + \frac{1}{3}\cosh B}$$

$$\frac{d}{dx} K(x, x, \tau) = \frac{-3\alpha^2}{D^2} \left\{ (\cosh A + 3\cosh B) [2\sinh B - \exp(-B) - 3\exp(-A)] + \right. \\ \left. - 3(\sinh A + \sinh B) [2\cosh B + \exp(-B) + \exp(-A)] \right\}$$

$$\frac{D^2}{3\alpha^2} \frac{d}{dx} K(x, x, \tau) = [2\cosh A \sinh B - \cosh A \exp(-B) - 3\cosh A \exp(-A) + \\ + 6\cosh B \sinh B - 3\cosh B \exp(-B) - 9\cosh B \exp(-A)] + \\ - [6\sinh A \cosh B + 3\sinh A \exp(-B) + 3\sinh A \exp(-A) + \\ + 6\sinh B \cosh B + 3\sinh B \exp(-B) + 3\sinh B \exp(-A)]$$

usando $2 \sinh A \cosh B = \sinh(A+B) + \sinh(A-B)$

$$\begin{aligned}
 &= -2 \operatorname{Senh}(A+B) - 4 \operatorname{Senh} A-B + \\
 &\quad - \exp(-B) \left[\operatorname{Cosh}A + 3 \operatorname{Senh}A + 3 \exp B \right] + \\
 &\quad - 3 \exp(-A) \left[\operatorname{Senh}B + 3 \operatorname{Cosh}B + \exp A \right] \\
 &= -2 \operatorname{Senh}(A+B) - 4 \operatorname{Senh}(A-B) + \\
 &\quad - 2 \left[\exp(A-B) + 3 + 3 \exp(B-A) + \exp(-A-B) \right] \\
 &= -2 \left[\operatorname{Cosh}(A+B) + 4 \operatorname{Cosh}(A-B) + 3 \right]
 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} K(x, x, \tau) = 6\alpha^2 \frac{\operatorname{Cosh}(A+B) + 4 \operatorname{Cosh}(A-B) + 3}{\left[\operatorname{Cosh}(3\alpha x - 36\alpha^3\tau) + 3 \operatorname{Cosh}(\alpha x - 28\alpha^3\tau) \right]^2}$$

$$A+B = 4\alpha x - 64\alpha^3\tau, \quad A-B = 2\alpha x - 8\alpha^3\tau$$

$$u(x, \tau) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x, \tau) = -12\alpha^2 \frac{\operatorname{Cosh}(4\alpha x - 64\alpha^3\tau) + 4 \operatorname{Cosh}(2\alpha x - 8\alpha^3\tau) + 3}{\left[\operatorname{Cosh}(3\alpha x - 36\alpha^3\tau) + 3 \operatorname{Cosh}(\alpha x - 28\alpha^3\tau) \right]^2}$$

(4-56)

COMPLEMENTOS

COMPLEMENTO A

CASO DIRECTO: SOLUCIONAMOS LA ECUACION DE SCHRODINGER

1. INTRODUCCION

En el Cap. I no hemos puesto énfasis en cómo obtener los parámetros de dispersión, utilizando la ec. de Schrodinger, a partir de un potencial conocido. Aquí queremos complementar este aspecto.

En primer lugar vamos a aprovechar que la ecuación de Schrodinger está ampliamente resuelta en varios textos para ciertos potenciales (potencial delta, pozo rectangular) limitándonos a enfocarlos en lo que se refiere a su aspecto como fenómeno de dispersión.

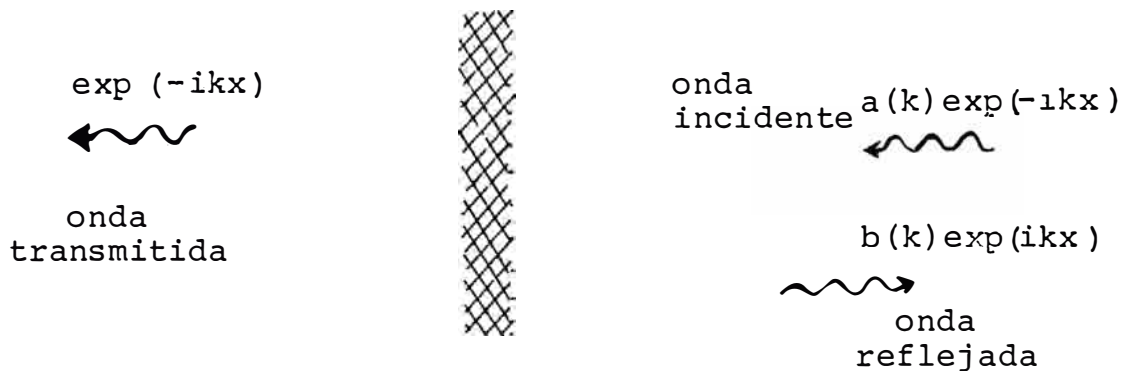


Fig. 1 Cuando k es real positivo este esquema interpreta un fenómeno de dispersión. Para k complejo hay la posibilidad de describir un estado ligado.

En el caso del pozo rectangular resultará interesante verificar que para ciertos valores particulares de energía de la onda incidente, ella no sufre reflexión alguna. Y así decimos que el potencial se comporta "transparente" para estas energías.

Como segundo paso estudiaremos el potencial $Q(x) = -Q_0 \operatorname{sech}^2 \alpha x$, se buscará la relación entre Q_0 y α que hagan al potencial completamente transparente. Esto es, ondas de cualquier energía que incidan sobre la zona de interacción no sufran reflexión.

Trabajamos con la ecuación de Schrodinger estacionaria

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} D^2 + \hat{V} \right) f = E f$$

donde $\hat{V}(f) = V f$; $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$k^2 \equiv \frac{2m}{\hbar^2} E$$

$$\Rightarrow D^2 f + (k^2 - Q) \cdot f = 0 \quad (\text{A-1})$$

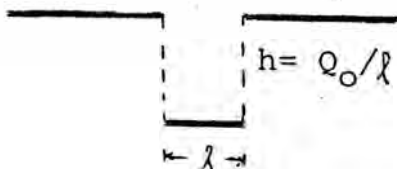
$$Q(x) \equiv \frac{2m}{\hbar^2} V(x)$$

2. EL POTENCIAL DELTA

$$Q(x) = -Q_0 \delta(x) \quad (Q_0 > 0, \text{cte}) \quad (\text{A-2})$$

La δ alcanza su correcto significado en el área de las distribuciones. Sin embargo, por ahora podemos considerarlo

como "un caso límite" de un pozo rectangular cuyo ancho l se hace cada vez más pequeño a la vez que su pro-



fundidad h aumenta manteniéndose en todo momento constante el producto hλ.

En cuanto a cómo operar matemáticamente con ella se usará

$$\int_{-\gamma}^{\gamma} \delta(x) f(x) dx = f(0) \quad \forall \gamma > 0 \text{ y toda función}$$

$$\delta(x) = 0 \dots\dots \text{ para } x \neq 0 \quad \text{continua en } x = 0$$

La correspondiente ecuación de Schrodinger es

$$D^2 f + [k^2 + Q_0 \delta(x)] f = 0, \quad k \in \mathbb{C} \quad (A-3)$$

k = ξ, ξ real energía positiva

k = iη, η real energía negativa

Exigiremos continuidad a la función de onda

Integramos en el intervalo (-γ, γ)

$$\int_{-\gamma}^{\gamma} D^2 f(x) dx + k^2 \int_{-\gamma}^{\gamma} f(x) dx + Q_0 \int_{-\gamma}^{\gamma} \delta(x) f(x) dx = 0$$

Como f continua ⇒ ∫_{-γ}^γ f(x) dx = 2γ f(s) donde -γ ≤ s ≤ γ.
entonces

$$[Df(+\gamma) - Df(-\gamma)] + 2k^2 \gamma f(s) + Q_0 f(0) = 0$$

Cuando γ ————— 0 se obtiene

$$Df(+0) - Df(-0) = -Q_0 f(0) \quad \text{es decir, } Df \text{ es discontinua en } x = 0^* \quad (A-4)$$

Para $x \neq 0$ la ec. (A-3) se reduce a

$$D^2 f + k^2 f = 0$$

cuya solución general es

$${}_k Y(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx) \quad k \text{ real ó complejo}$$

Para enmarcar el problema en el esquema de dispersión de la Fig. 1, planteemos una solución de la forma

$${}_k \Phi(x) = \begin{cases} a(k) \exp(-ikx) + b(k) \exp(ikx) & x > 0 \\ \exp(-ikx) & x < 0 \end{cases} \quad (A-5):$$

$$k \in \mathbb{C}$$

la cual satisface la forma de la solución general ${}_k Y$.

Continuidad de ${}_k \Phi$ en $x = 0$ implica

$$a(k) + b(k) = 1$$

reemplazando (A-5) en (A-4)

$$b(k) - a(k) = 1 + \frac{Q_0}{ik}$$

* La función DY ha resultado ser discontinua a consecuencia del tipo de potencial muy particular que estamos usando: potencial δ . Cuando se tiene un potencial que es finito en una vecindad de x_0 y se sigue el mismo procedimiento hecho aquí resulta que DY es continua en x_0 .

de ambas relaciones para $a(k)$ y $b(k)$ se obtiene

$$a(k) = 1 + \frac{Q_0}{2ik} \qquad b(k) = - \frac{Q_0}{2ik} \qquad (A-6)$$

Para k real positivo, la función ϕ_k interpreta el fenómeno de dispersión esquematizado en la Fig.1

Sin embargo a partir de la misma expresión(A-5) pueden obtenerse los estados ligados. Estos corresponden a aquellos valores $k = k_j$ en que $a(k_j) = 0$. En(A-6) vemos que $a(k) = 0$ si $k = k_1 = i \frac{Q_0}{2}$ y la correspondiente función propia la obtenemos al reemplazar este valor de k en(A-5):

$$\phi_{k_1}(x) = \exp\left(\frac{Q_0}{2} |x|\right) \ ; \ k_1 = i \frac{Q_0}{2} \qquad (A-7)$$

En resumen , con el potencial $Q(x) = - Q_0 \delta(x)$ se verifica lo siguiente:

- En el valor de $k = k_1$ en que su correspondiente función propia ϕ_{k_1} representa un estado ligado, se cumple $a(k_1) = 0$
- El número k_1 está ubicado en el eje imaginario positivo del plano complejo: $k_1 = i \frac{Q_0}{2}$
- Como el coeficiente de reflexión $R(k) = \frac{b(k)}{a(k)} = - \frac{Q_0}{2+ik}$ es diferente de cero para todo valor de k , este potencial no se comporta como transparente para ninguna energía de la onda incidente.

3. POTENCIAL POZO RECTANGULAR

$$Q(x) = \begin{cases} -Q_0 < 0 & \text{para } |x| \leq \alpha \\ 0 & |x| > \alpha \end{cases} \quad (\text{A-8})$$

Reemplazamos (A-8) en (A-1)

• para $|x| \leq \alpha$ la ecuación toma la forma

$$D^2 f + (k^2 + Q_0) f = 0 \quad k \in \mathbb{C}$$

su solución: $f(x) = A \exp(-i \xi x) + B \exp(i \xi x)$

$$\text{donde } \xi = (k^2 + Q_0)^{1/2}$$

• para $|x| > \alpha$ la ecuación a resolver es

$$D^2 f + k^2 f = 0$$

su solución: $f(x) = A' \exp(-ikx) + B' \exp(ikx)$

Para representar el fenómeno de dispersión de la Fig. 1 elegimos una función de la forma

$$k \phi(x) = \begin{cases} a(k) \exp(-ikx) + b(k) \exp(ikx) & x > \alpha \\ A(k) \exp(-i \xi x) + B(k) \exp(i \xi x) & |x| < \alpha \\ \exp(-ikx) & x < -\alpha \end{cases} \quad (\text{A-9})$$

$k \in \mathbb{C}$

Exigimos que la función de onda $k \phi$ sea continua. Así

mismo, puesto que el potencial es finito en todo $x \in \mathbb{R}$, $D_k \phi$ es también continua (integrando la ecuación (A-1) en un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, x_0 arb., $\delta \ll 1$, puede desprenderse tal resultado.)

Al evaluar ${}_k \phi$ y $D_k \phi$ en $x = \pm \alpha$ y aplicar las condiciones de continuidad obtenemos 4 relaciones para las 4 incógnitas a, b, A y B . Al despejar resulta

$$\begin{aligned} A(k) &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k}{\xi} \right) \exp [i(k-\xi)\alpha] \\ B(k) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k}{\xi} \right) \exp [i(k+\xi)\alpha] \\ a(k) &= \exp(2ik\alpha) \left[\cos 2\xi\alpha - \frac{i}{2} \left(\frac{\xi}{k} + \frac{k}{\xi} \right) \sin 2\xi\alpha \right] \\ b(k) &= \frac{i}{2} \left(\frac{\xi}{k} - \frac{k}{\xi} \right) \sin 2\xi\alpha \\ k \in \mathbb{C} \quad , \quad \xi &= (k^2 + Q_0)^{1/2} \end{aligned} \tag{A-10}$$

¿Para qué valores de la energía $k^2 > 0$ de la onda incidente el pozo se comporta como TRANSPARENTE?

En(A-9) notamos que tal situación puede determinarse hallando los valores de k para los cuales $b(k) = 0$.

En (A-10), exigir $b(k)=0$ implica que:

$$\bullet \quad \frac{\xi}{k} - \frac{k}{\xi} = 0 \quad , \quad \xi^2 = k^2 \quad , \quad k^2 + Q_0 = k^2 \quad \longrightarrow \quad Q_0 = 0.$$

De hecho, si no hay potencial (esto es, no se tiene interacción) no se tendrá onda reflejada,

$$\begin{aligned}
 \circ \text{ Sen } 2\xi\alpha = 0 \quad , \quad 2\xi\alpha = n\pi \longrightarrow \xi^2 &= \left(\frac{n\pi}{2\alpha}\right)^2 \\
 0 < k_n^2 = \left[\left(\frac{n\pi}{2\alpha}\right)^2 - Q_0 \right] , n = 1, 2, 3, \dots & \\
 & \text{(A-11)}
 \end{aligned}$$

Para valores de $k = k_n$, dados en (A-11) la onda incidente no sufre reflexi3n* Si esto ocurre ¿cuál habr3 sido, entonces el efecto del potencial sobre las ondas incidentes?

Para $2\xi\alpha = n$ la expresi3n (A-10) indica que $a(k_n) = (-1)^n \exp(2ik_n\alpha)$

y la correspondiente funci3n de onda, dada por (A-9), es

$$\left(k_n \Phi \right) (x) = \begin{cases} (-1)^n \exp[-ik_n(x - 2\alpha)] & x > \alpha \\ \exp(-ik_n x) & x < -\alpha \end{cases} \quad \text{A-12}$$

para valores de $k = k_n$ dados en (A-10)

el efecto neto del potencial se reduce a producir un cambio de fase de la funci3n de onda. (el desfase es igual al ancho del pozo)

Buscamos estados ligados

Una condici3n necesaria para que la funci3n de onda represente un estado ligado es que $\phi \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$. En (A-9) nuestra funci3n de onda tiene el comportamiento $\exp(-ikx)$ para $x < -\alpha$. Una manera de conseguir que ella pueda represen-

* k^2 es la energ3a de la onda incidente.

tar un estado ligado es exigir $k = i\eta$, pues $\exp(-ikx) = \exp(\eta x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$, si $\eta > 0$.

Tomaremos entonces $k = i\eta$, $\eta > 0$

Debemos verificar que la función de onda también tienda a cero en $x \rightarrow \infty$. Nótese la necesidad que $a(k)$ se anule para tal valor de k , pues de lo contrario $\phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$

Nuestra tarea entonces es buscar aquellos valores para los cuales $a(i\eta) = 0$

En (A-10) tenemos

$$a(i\eta) = \exp(-2\eta\alpha) \left[\cos 2\xi\alpha - \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{\eta} + \frac{\eta}{\xi} \right) \text{Sen } 2\xi\alpha \right]$$

$$\xi = (Q_0 - \eta^2)^{1/2}$$

$$a(i\eta) = 0 \Rightarrow 2 \cot(2\xi\alpha) = \frac{\xi}{\eta} + \frac{\eta}{\xi}$$

Usando $2 \cot(2u) = \cot(u) - \tan(u)$, resulta

$$\left(\cot \xi\alpha - \frac{\xi}{\eta} \right) = \left(\tan \xi\alpha - \frac{\eta}{\xi} \right) = C \quad (\text{A-13})$$

lo cual conduce a $C(C + \frac{\eta}{\xi} + \frac{\xi}{\eta}) = 0$

indicando que podemos elegir $C = 0$ ó $C = -(\frac{\eta}{\xi} + \frac{\xi}{\eta})$

(por supuesto c no puede tomar ambos valores a la vez)

En (A-13)

$$C = 0 \Rightarrow \tan \xi\alpha = \frac{\eta}{\xi} \quad (\text{A-14})$$

$$C = -\frac{\eta}{\xi} - \frac{\xi}{\eta} \Rightarrow \tan \xi\alpha = -\frac{\xi}{\eta} \quad (\text{A-15})$$

Las ecuaciones (A-14), (A-15), pueden resolverse gráficamente; aquí daremos una breve explicación de cómo solucionar la primera de ellas.

En (A-14), como $\xi = (Q_0 - \eta^2)^{1/2}$, se tiene que η debe satisfacer la ec.

$$(Q_0 - \eta^2)^{1/2} \tan \left[\alpha (Q_0 - \eta^2)^{1/2} \right] = \eta$$

Ella se hace más simple si definimos la variable

$$s = \alpha (Q_0 - \eta^2)^{1/2} \quad \eta = \left[Q_0 - \left(\frac{s}{\alpha} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A-16})$$

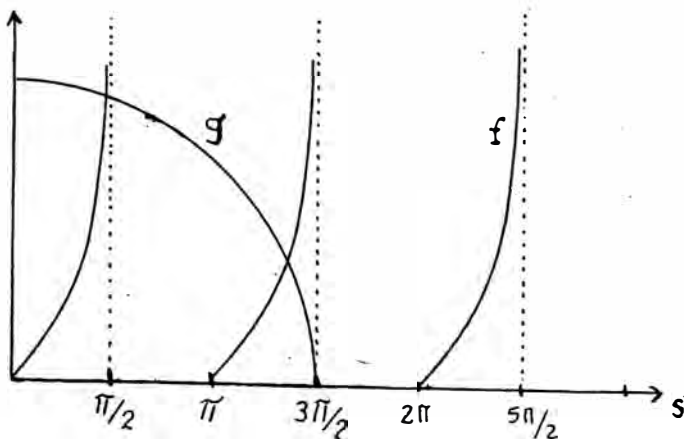
pues ahora la forma es

$$s \tan(s) = \sqrt{Q_0 \alpha^2 - s^2} \quad (\text{A-17})$$

Debemos buscar entonces los puntos de intersección $s = s_j$ de las gráficas de las funciones f y g dadas por

$$f(s) = s \tan(s)$$

$$g(s) = \sqrt{Q_0 \alpha^2 - s^2} \quad (\text{arco de circunferencia de radio } \sqrt{Q_0 \alpha^2})$$



Si $n\pi < s < (n+1)\pi$ existirán intersecciones, o sea habrán n valores de s para los cuales se satisface (A-17). Usando (A-16) obtendremos los correspondientes valores de η .

4. ESTUDIO DEL POTENCIAL

$$U(x) = -U_0 \operatorname{sech}^2 \alpha x \quad (\text{A-18})$$

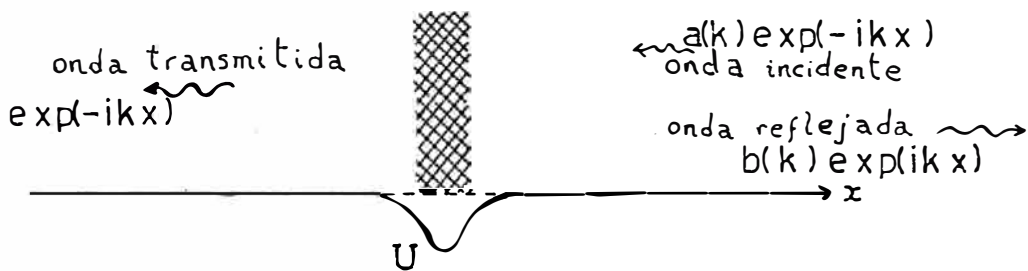


Fig. 2

4.1 Ondas incidente, reflejada y transmitida.-

Deseamos encontrar los coeficientes $a(k)$ y $b(k)$ que aparecen en la figura 2.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} D^2 f + (-U_0 \operatorname{sech}^2 \alpha x) f = E f$$

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E \quad \Rightarrow \quad D^2 f + (k^2 + Q_0 \operatorname{sech}^2 \alpha x) f = 0 \quad (\text{A-19})$$

$$Q_0 = \frac{2m}{\hbar^2} U_0$$

Cambio de variable

$$f(x) = g(\xi) \quad \xi = \tanh(\alpha x) \quad \Rightarrow \quad (1 - \xi^2) D^2 g - 2\xi Dg + \left[\frac{Q_0}{\alpha^2} + \frac{(k/\alpha)^2}{1 - \xi^2} \right] g = 0$$

Le damos la forma de la Ec. de Legendre

$$\frac{Q}{x^2} = s(s+1)$$

$$\frac{k^2}{x^2} = -p^2$$

$$\Rightarrow (1-\xi^2) D^2 g - 2\xi Dg + \left[s(s+1) - \frac{p^2}{1-\xi^2} \right] = 0$$

(A-21)

$$g(\xi) = (1-\xi^2)^{p/2} u(\xi) \Rightarrow (1-\xi^2) D^2 u - 2\xi(p+1)Du +$$

$$+[s(s+1)-p(p+1)]u = 0$$

(A-22)

Buscamos la función que describa el fenómeno de dispersión esquematizado en la Fig. 2

Cambio de variable a fin de llevarla a la forma de una ecuación hipergeométrica

$$u(\xi) = v(z) \quad z(1-z) D^2 v + (1-2z)(p+1) Dv + \quad (A-23)$$

$$\Rightarrow$$

$$z = \frac{1}{2} (1 + \xi) \quad +[s(s+1) - p(p+1)] v =$$

ambos signos dan lugar a la misma ecuación diferencial.

Nuestra ecuación coincidirá con la ecuación hipergeométrica.

$$z(1-z) D^2 v + [c-(a+b+1)z] Dv - abz = 0 \quad (A-24)$$

(ver anexo al final de este complemento)

si identificamos los parámetros a,b,c como sigue

$$p + 1 = c \quad a(p+1) = a+b+1 \quad ab = p(p+1)-s(s+1)$$

De esta última expresión despejamos los valores, a, b, c

$$c = p + 1; \quad b = p-s \quad a = p + s + 1 \quad (A-26)*$$

La solución de (A-23) es entonces

$$v(z) = F(a;b;c;z) = F(p+s+1; p-s; p+1; z) \quad (A-27)$$

donde

$$F(a;b;c;z) = 1 + \frac{ab}{1 \cdot c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} z^2 + \\ + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c(c+1)(c+2)} z^3 + \dots$$

Reconstruimos ahora los cambios de variable

$$u(\xi) = v \left(\frac{1}{2} (1 + \xi) \right)$$

$$u(\xi) = F \left(p+s+1; p-s; p+1; \frac{1}{2} (1 + \xi) \right)$$

reemplazando en (A-22)

$$g(\xi) = (1-\xi^2)^{p/2} F \left(p+s+1; p-s; p+1; \frac{1}{2} (1 + \xi) \right)$$

como $f(x) = g(\xi)$ y $\xi = \tanh(\alpha x)$, la solución de (A-19) es

$$f(x) = (\text{Sech } \alpha x)^p F \left(p+s+1, p-s; p+1; \frac{1}{2} (1 + \tanh \alpha x) \right) \quad (A-28)$$

$$\text{donde } p^2 = -(k/\alpha)^2; \quad s(s+1) = \frac{Q_0}{\alpha^2}$$

* otra solución es $c=p+1$, $a=p-s$, $b=p+s+1$. Pero, como la serie hipergeométrica es simétrica bajo un intercambio de a con b, el resultado será el mismo.

• Analicemos el comportamiento de esta solución en la región $x \rightarrow -\infty$

Dado que $F(a; b; c; 0) = 1$ y además

$$\operatorname{Sech} \alpha x \underset{x \rightarrow -\infty}{\longrightarrow} 2 \exp(\alpha x); \quad \tanh \alpha x \underset{x \rightarrow -\infty}{\longrightarrow} -1$$

en (A-28) tendremos

$$f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\longrightarrow} 2^p \exp(\alpha p x) F\left(p+s+1; p-s; p+1; \frac{1}{2}(1 \pm (-1))\right)$$

la cual para que tenga la forma $\exp(-ikx)$, en (A-28) debemos elegir el signo + y además $p = -i k/\alpha$. Luego

$$f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\longrightarrow} 2^p \exp(-ikx) \quad ; \quad p = -i \frac{k}{\alpha} \quad (\text{A-29})$$

• Para el análisis en la región $x \rightarrow \infty$ nos es útil la siguiente relación entre las funciones hipergeométricas.

$$F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} F(a; b; a+b+1-c; 1-z) + \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} F(c-a; c-b; 1+c-a-b; 1-z) \quad (\text{A-30})$$

que al ser usada en (A-28) resulta

$$f(x) = (\operatorname{Sech} \alpha x)^p \left\{ \frac{\Gamma(p+1) \Gamma(-p)}{\Gamma(-s) \Gamma(s-1)} F(p+s+1; p-s; p+1; \frac{1}{2}(1 - \tanh \alpha x)) + \frac{\Gamma(p+1) \Gamma(p)}{\Gamma(p+s+1) \Gamma(p-s)} \left[\frac{1}{2}(1 - \tanh \alpha x) \right]^{-p} F(-s; s+1; 1-p; \frac{1}{2}(1 - \tanh \alpha x)) \right\}$$

Como $\text{Sech } \alpha x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 2 \exp(-\alpha x)$; $1 - \tanh \alpha x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 2 \exp(-2\alpha x)$

$$F(z, b, c, 0) = 1 \quad \text{y} \quad p = -\frac{ik}{\alpha}$$

en (A-28), al tener en cuenta solo el signo mas (+), obtenemos

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 2^p \exp(ikx) \left\{ \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(-p)}{\Gamma(-s)\Gamma(s+1)} F(p+s+1; p-s; p+1; \exp(-2\alpha x)) + \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(p)}{(p+s+1)(p-s)} \exp(-2ikx) F(-s; s+1; 1-p; \exp(-2\alpha x)) \right\}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} = 2^p \left\{ \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(-p)}{\Gamma(-s)\Gamma(s+1)} \exp(ikx) + \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(p)}{\Gamma(p+s+1)\Gamma(p-s)} \exp(-ikx) \right\} \quad (A-31)$$

$$p = -i \frac{k}{\alpha}$$

Resumimos los resultados (A-28), (A-29), (A-31) (luego de dividir entre 2^p)

Al resolver la ec. de Schrodinger

$$D^2 f + (k^2 + Q_0 \text{Sech}^2 \alpha x) f = 0$$

encontramos que la solución que interpreta el fenómeno de dispersión de la fig. 3 es

$$\phi(x, k) = \left(\frac{1}{2} \text{Sech} \alpha x\right)^{-ik/\alpha} F(p+s+1; p-s; p+1; \frac{1}{2}(1+\tanh \alpha x))$$

donde $p = -ik/\alpha$ (A-32)

Ella satisface

$$\psi(x, k) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \exp(-ikx) \quad (\text{A-33})$$

$$\psi(x, k) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} a(k) \exp(-ikx) + b(k) \exp(ikx)$$

$$\text{donde } a(k) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(p+1)}{\Gamma(p+s+1) \Gamma(p-s)}, \quad p = -i \frac{k}{\alpha} \quad (\text{A-34})$$

$$b(k) = \frac{\Gamma(p+1) \Gamma(-p)}{\Gamma(-s) \Gamma(s+1)} \quad s(s+1) = \frac{Q_0}{\alpha^2}$$

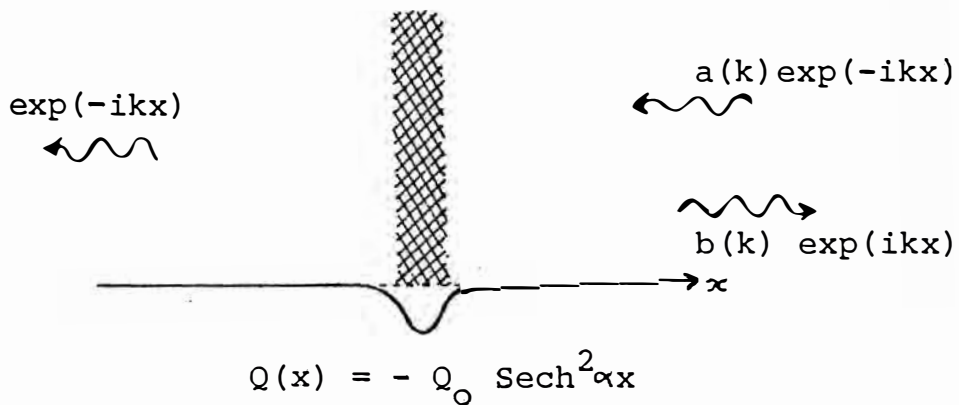


Fig. 3

4.2 Potenciales transparentes

4.2.1 Condiciones impuestas a Q_0 y α para que no haya onda reflejada

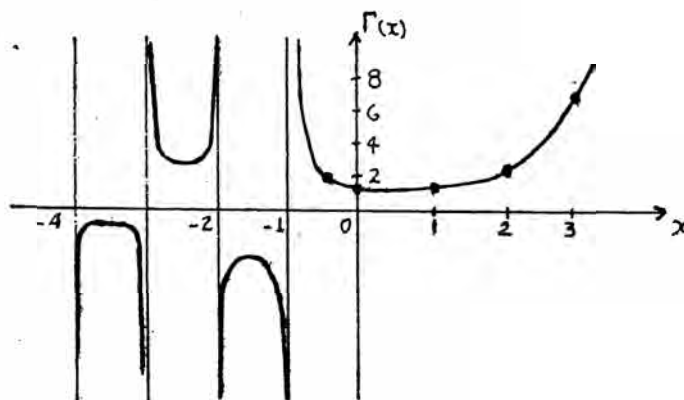
En (A-33), para k real positivo, tenemos

$$\psi(x, k) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \begin{matrix} a(k) \exp(-ikx) & + & b(k) \exp(ikx) \\ \text{onda} & & \text{onda} \\ \text{incidente} & & \text{reflejada} \end{matrix}$$

A la onda reflejada acompaña el coeficiente $b(k)$. El potencial $Q(x) = -Q_0 \operatorname{sech}^2 \alpha x$ se comportará como transparente si dicho coeficiente es nulo para todo valor de k .

Teniendo en cuenta:

- la gráfica de la función Γ



- y que en la expresión para $b(k) = \frac{\Gamma(-i\frac{k}{\alpha} + 1) \Gamma(i\frac{k}{\alpha})}{\Gamma(s+1) \Gamma(-s)}$

el valor de k aparece sólo en el numerador,

ENTONCES cabe la posibilidad de conseguir $b(k) = 0$ si encontramos las condiciones bajo las cuales el denominador tienda a infinito.

Todo lo que debemos hacer es exigir que:

$$s + 1 = -m \quad m = 1, 2, \dots$$

En (A-34) se tiene

$$s(s+1) = \frac{Q_0}{\alpha^2} \Rightarrow s = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 \frac{Q_0}{\alpha^2}}$$

optaremos por tomar el signo menos (-1) que aparece delante del signo radical (si se toma el signo (+) se llega al

mismo resultado) $s = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 \frac{Q_0}{\alpha^2}} \right) < 0 \Rightarrow \Gamma(-s)$ nunca tiende a ∞ (ver gráfica de la función Γ). En cambio

$$s+1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 \frac{Q_0}{\alpha^2}} \text{ y si } s+1 = -m, m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

entonces $\Gamma(s+1) \longrightarrow \infty$

Despejando el valor de Q_0

$$\frac{Q_0}{\alpha^2} = m(m+1), \quad m = 1, 2, \dots$$

condición para que el potencial $Q(x) = -Q_0 \operatorname{Sech}^2 \alpha x$ se comporte como transparente

(A-35)

4.2.2 Obtención de las funciones de onda que describen estados ligados.

$$Q(x) = -Q_0 \operatorname{Sech}^2 \alpha x, \text{ tal que } \frac{Q_0}{\alpha^2} = m(m+1) \quad (A-36)$$

Los pasos seguidos desde (A-19) hasta (A-22) en la sección anterior vuelven a repetirse

$$D^2 f + (k^2 + Q_0 \operatorname{Sech}^2 \alpha x) f = 0 \quad (A-37)$$

$$f(x) = (1 - \xi)^{p/2} u(\xi)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} & (1 - \xi^2) D^2 u - 2\xi(p+1) Du + \\ & + (m(m+1) - p(p+1)) u = 0 \end{aligned}$$

$\xi = \tanh(\alpha x)$

$$\text{donde } p^2 = -\frac{k^2}{\alpha^2} \quad \gamma \quad m = 1, 2, 3,$$

Buscamos la solución en forma de una serie de potencias

$$u(\xi) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h \xi^h$$

que nos conduce al siguiente resultado:

La solución a la ecuación(A-37) es

$$f(x) = (1 - \xi^2)^{p/2} u(\xi) \quad , \quad \xi = \tanh(\alpha x) \quad (\text{A-38})$$

$$\text{donde } u(\xi) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h \xi^h \quad (\text{A-39})$$

$$a_{h+2} = \frac{(p+h)(p+h+1) - m(m+1)}{(h+1)(h+2)} a_h \quad h=0, 1, 2, \dots$$

$$a_0, a_1 \text{ constantes arbitrarias, } p^2 = -(k/\alpha)^2$$

La solución es una combinación lineal de una serie de potencias pares y otra impares

$$\text{como } \left| \frac{a_{h+2}}{a_h} \frac{\xi^{h+2}}{\xi^h} \right| \xrightarrow{h \rightarrow \infty} |\xi|^2$$

la serie converge para valores de $|\xi| < 1$

Para $|\xi|=1$ la serie A-39 quizás diverge Sin embargo pa ra obtener estados ligados es necesario que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

pero en nuestro caso tenemos que

$$f(x) = (1 - \xi^2)^{p/2} u(\xi) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e^{-\alpha p x} u(1 - 2e^{-2\alpha x}) \longrightarrow e^{-\alpha p x} u(1)$$

estando p por determinarse y $u(1)$ quizás divergente, nada nos asegura que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

Sin embargo, encontramos una salida a esta situación. Para valores adecuados de p la serie de potencias de u dada en A-39 se convierte en un polinomio. En efecto, en su relación de recurrencia el valor de m es fijo y si p toma un valor entero menor que m tal relación indicará que los coeficientes a_{h+2} son nulos a partir de cierto número entero $h = h_0$, si se cumple

$$p + h_0 = m, \quad p \text{ entero positivo} \quad (\text{A-41})^*$$

donde $p^2 = -\frac{k^2}{\alpha^2}$ y m es un valor fijo elegido de antemano en (A-36)

Como $\frac{Q_0}{\alpha^2} = m(m+1)$ el valor para p lo expresamos así:

$$p = \sqrt{-m(m+1) \frac{k^2}{Q_0}} \quad (\text{A-42})$$

* La necesidad de exigir $p > 0$ es para asegurar que la solución a (A-37) cumpla $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$. Esto puede verse en A-40.

Ejemplo 1. Elijamos $m=1$ en (A-36)

$$Q(x) = Q_0 \operatorname{sech}^2 \alpha x, \quad Q_0 = 2\alpha^2 \quad (\text{A-43})$$

El correspondiente valor de p , en (A-42), es $p = \sqrt{-2k^2/Q_0}$ y la relación de recurrencia, en A-39, es

$$a_{h+2} = \frac{(p+h)(p+h+1)-1(2)}{(h+1)(h+2)} a_h \quad \begin{array}{l} h = 0, 2, 4, 6 \dots \\ \text{ó} \\ h = 1, 3, 5, 7 \end{array} \quad (\text{A-44})$$

Si al ir incrementando el valor de h , para algún $h = h_1$ se cumpliera que

$$p+h_1 = 1 \quad \text{o sea} \quad \sqrt{-2k^2/Q_0} + h_1 = 1 \quad (\text{A-45})$$

entonces, $a_{h_1+2} = 0$ y así todos los coeficientes a_{h_1+2h} INGE TON
 $h = 1, 2, 3, \dots$ también serán nulos; $u(\xi)$ será un polinomio.

La única posibilidad para ello es elegir $p = 1$ y $h_1 = 0$, en A-45. O sea debemos elegir un valor de $k = k_1$ tal que $k_1^2 = -(Q_0/2)$

$$k_1 = i(Q_0/2)^{1/2}, \quad Q_0 = 2\alpha^2 \quad (\text{A-46})$$

Reemplazando este valor en A-44 (para potencias pares) se obtiene $a_2 = 0$ lo cual implica $a_{2k} = 0$ para $k = 1, 2, 3, \dots$. La serie se reduce a $u(\xi) = a_0$ y la solución, en A-38, estará dada por

$$f(x) = a_0 (1 - \xi^2)^{1/2} = a_0 \operatorname{sech} \alpha x, \quad k_1 = i\alpha$$

La constante a_0 es elegida igual a $\frac{1}{2}$ para así f se constituya en una función de Jost. $\left(\begin{array}{c} \Phi \\ k \end{array} (x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \exp(-ikx) \right)$

En conclusión:

$$\text{La ecuación } D^2 f + (k^2 - Q)f = 0$$

$$\text{con } Q(x) = -Q_0 \operatorname{sech}^2 \alpha x, \quad Q_0 = 2\alpha^2$$

admite como solución una función que describe un estado ligado solo cuando $k = k_1$. Ella está dada por

$$k_1 \phi(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sech} \alpha x, \quad k_1 = i\alpha \quad \text{A-47}$$

Esta función cumple

$$k_1 \phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \exp(\alpha x) = \exp(-ik_1 x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_1 \phi^2(x) dx = \frac{1}{2\alpha}$$

A-48

Ejemplo 2. Elegimos $m = 2$ en A-36

$$Q(x) = -Q_0 \operatorname{Sech}^2 \alpha x, \quad Q_0 = 6 \alpha^2 \quad (\text{A-49})$$

En A-42 $p = \sqrt{-6k^2/Q_0}$ y la relación de recurrencia, en A-39, es

$$a_{h+2} = \frac{(p+h)(p+h+1) - 2(3)}{(h+1)(h+2)} a_h \quad \begin{array}{l} = 0, 2, 4, 6 \dots \quad \text{ó} \\ = 1, 3, 5, 7 \dots \end{array} \quad (\text{A-50})$$

Si para algún $h = h_2$ se cumpliera

$$p + h_2 = 2, \quad \sqrt{-6k^2/Q_0} + h_2 = 2 \quad (\text{A-51})$$

el coeficiente a_{h_2+2} sería nulo y también todo $a_{h_2+2h} = 0$

$h = 1, 2, 3, \dots$

En(A-51) se presentan 2 posibilidades: $p = 1$ ó $p = 2$

- Sea $p = 1 \Rightarrow k = k_1^2 = -\frac{Q_0}{6} = -\alpha^2$

la relación de recurrencia en A-50 indica $a_3 = 0$, así

todos aquellos coeficientes $a_{3+2h} = 0$ $h = 1, 2, 3,$

la serie para $u(\xi)$ se reduce a: $u(\xi) = a_1 \xi$

La solución que nos indica A-38 es

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - \xi^2)^{1/2} a_1 \xi, \quad \xi = \tanh \alpha x \\ &= a_1 \tanh(\alpha x) \operatorname{Sech}(\alpha x), \quad k_1 = i\alpha \end{aligned} \quad (\text{A-52})$$

Elegiremos $a_1 = \frac{1}{2}$

• Sea $p = 2$ $k^2 = k_2^2 = -\frac{2}{3} Q_0 = -4\alpha^2$

Con este valor de p , (A-50) indica que $a_2 = 0$ y así:
 $a_{2h} = 0$ $h = 1, 2, \dots$ La serie (A-39) se reduce a
 $u(\xi) = a_0$

La solución que nos indica (A-38) es

$$f(x) = (1 - \xi^2) a_0$$

$$= a_0 \operatorname{Sech}^2 \alpha x, \quad k_2 = i2\alpha \tag{A-53}$$

(Elegiremos $a_0 = 1/4$)

En conclusión :

La ecuación $D^2 f + (k^2 - Q) f = 0$

con $Q(x) = -Q_0 \operatorname{Sech}^2 \alpha x$, $Q_0 = 6\alpha^2$ ($\alpha > 0$)

admite como soluciones funciones que describen estados
 ligados cuando $k = i\alpha$ y $k = i2\alpha$

$$k_1 \phi(x) = -\frac{1}{2} \tanh \alpha x \operatorname{Sech} \alpha x, \quad k_1 = i\alpha$$

$$k_2 \phi(x) = \frac{1}{4} \operatorname{Sech}^2 \alpha x, \quad k_2 = i2\alpha \tag{A-54}$$

Ellas cumplen

$$k_1 \phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \exp(\alpha x) = \exp(-ik_1 x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_1 \phi^2(x) dx = \frac{1}{6\alpha} \tag{A-55}$$

$$k_2 \phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \exp(2\alpha x) = \exp(-ik_2 x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_2 \phi^2(x) dx = \frac{1}{12\alpha} \tag{A-56}$$

Ejemplo 3. Elegimos $m = 3$ en (A-36)

$$Q(x) = -Q_0 \operatorname{sech}^2 \alpha x, \quad Q_0 = 12 \alpha^2 \quad (\text{A-57})$$

En A-42 $p = \sqrt{-12 k^2/Q_0}$ y la relación de recurrencia, en (A-39) es

$$a_{h+2} = \frac{(p+h)(p+h+1) - 3(4)}{(h+1)(h+2)} a_h \quad (\text{A-58})$$

Si para algún $h = h_3$ se cumpliera

$$(p + h_3) = 3 \quad \text{o} \quad \sqrt{-12 k^2/Q_0} + h_3 = 3 \quad (\text{A-59})$$

El coeficiente $a_{h_3+2} = 0$ y también $a_{h_3+2h} = 0 \quad h = 2, 3, 4$

En A-59 se presentan 3 posibilidades $p = 1, 2, \text{ ó } 3$

$$\bullet \quad p = 1 \Rightarrow k^2 = k_1^2 = -\frac{Q_0}{12} = -\alpha^2 \quad ; \quad Q_0 = 12 \alpha^2$$

La relación de recurrencia indica $a_2 = -5a_0$, $a_4 = 0$ y así $a_{2h} = 0 \quad h = 2, 3, 4, \dots$. La serie para u , en (A-39), se reduce a:

$$u(\xi) = a_0 + a_2 \xi^2 = a_0 (1 - 5 \xi^2)$$

$$f(x) = (1 - \xi^2)^{1/2} a_0 (1 - 5 \xi^2), \quad \xi = \tanh \alpha x$$

$$= a_0 (\operatorname{sech} \alpha x) (1 - 5 \tanh^2 \alpha x), \quad k_1 = i \alpha \quad (\text{A-60})$$

Elegiremos $a_0 = -\frac{1}{8}$

$$\bullet p = 2 \implies k^2 = k_2^2 = -\frac{Q_0}{3}, \quad Q_0 = 12\alpha^2$$

Para $h = 1$ la relación de recurrencia (A-58) indica que $a_3 = 0$ y así $a_{3+2h} = 0$, $h = 1, 2, \dots$

La serie para h , en A-39 se reduce a $u(\xi) = a_1 \xi$

En (A-38) tendremos

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - \xi^2) a_1 \xi & \xi &= \tanh \alpha x \\ &= a_1 \operatorname{Sech}^2 \alpha x \tanh \alpha x, & k_2 &= i2\alpha \end{aligned} \quad (\text{A-61})$$

Elegiremos $a_1 = -\frac{1}{4}$

$$\bullet p = 3 \implies k^2 = k_3^2 = -\frac{3}{4} Q_0; \quad Q_0 = 12\alpha^2$$

Para este valor de p la relación de recurrencia (A-53)

indica que $a_2 = \frac{3(2) - 3(2)}{(1)(2)} a_0$ y así $a_{2h} = 0$ $h = 1, 2,$

Luego $u(\xi) = a_0$ y (A-38) indica que la solución está dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - \xi^2)^{3/2} a_0, & \xi &= \tanh \alpha x \\ &= a_0 \operatorname{Sech}^3 \alpha x; & k_3 &= i3\alpha \end{aligned} \quad (\text{A-62})$$

Elegiremos $a_0 = \frac{1}{8}$

Conclusión

La ec. $D^2 f + (k^2 - Q) f = 0$

con $Q(x) = -Q_0 \operatorname{Sech}^2 \alpha x$, $Q_0 = 12\alpha^2$ ($\alpha > 0$)

admite unas soluciones funciones que describen estados ligados cuando $k = i\alpha$, $k = i2$, o $k = i3\alpha$

$$\begin{aligned}k_1 \phi(x) &= -\frac{1}{8} (1 - 5 \tanh^2 \alpha x) \operatorname{Sech} \alpha x, & k_1 &= i\alpha \\k_2 \phi(x) &= -\frac{1}{4} \tanh \alpha x \operatorname{Sech} \alpha x, & k_2 &= i2\alpha \\k_3 \phi(x) &= \frac{1}{8} \operatorname{Sech}^3 \alpha x, & k_3 &= i3\alpha\end{aligned} \quad (\text{A-63})$$

Ellas cumplen

$$\begin{aligned}k_1 \phi(x) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \exp(\alpha x) = \exp(-ik_1 x) \\k_2 \phi(x) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \exp(2\alpha x) = \exp(-ik_2 x) \\k_3 \phi(x) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \exp(3\alpha x) = \exp(-ik_3 x)\end{aligned}$$

ANEXO

1. SERIE HIPERGEOMETRICA

$$F(a,b,c,z) = 1 + \frac{ab}{1 \cdot c} z + \frac{a(a+1) b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} + \frac{a(a+1) (a+2)b(b+1) (b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c(c+1) (c+2)} z^3 + \dots$$

donde $c \neq$ entero neg.

$$F \text{ converge en } \begin{cases} z < 1 \\ z = 1 & \text{si real } (c-a-b) > 0 \\ z = -1 & \text{si real } (c-a-b+1) > 0 \end{cases}$$

2. ECUACION HIPERGEOMETRICA

$$z(1-z)y'' + \{c - (a+b+1)z\}y' - aby =$$

La solución general está dada por

$$y(z) = AF(a,b,c;z) + Bz^{1-c}F(a+1-c, b+1-c, 2-c; z)$$

válida para $|z| < 1$

3. LA SERIE HIPERGEOMETRICA SATISFACE

$$F(a,b,c,z) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} F(a,b,a+b+1-c;1-z) + \\ + \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} F(c-a,c-b,1+c-a-b;1-z)$$

Si Real $(c-a-b) > 0$, Real $(c) < 1$

COMPLEMENTO B

LAS FUNCIONES DE JOST

La tarea de recobrar la función potencial Q a partir de los parámetros de dispersión se lleva a cabo en una forma bastante comprensible usando las funciones de Jost; tal tarea la desarrollaremos en el Complemento C y lo que pretendemos ahora es presentar el estudio analítico de tales funciones.

Las funciones de Jost se originan a partir del siguiente problema:

Para un valor fijo de $k \in \mathbb{C}$ buscamos 4 soluciones de la ec. estacionaria de Schrodinger

$$-D^2 Y + Q Y = k^2 Y \quad x \in \mathbb{R} \quad (B-1)$$

$$Q(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$$

que tengan el siguiente comportamiento asintótico

$$\begin{aligned} {}_k\Phi(x) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \exp(-ikx) & {}_k\Psi(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \exp(ikx) \\ {}_k\bar{\Phi}(x) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \exp(ikx) & {}_k\bar{\Psi}(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \exp(-ikx) \end{aligned} \quad (B-2) *$$

Notar que en (B-2) no se impone ninguna condición al comportamiento de las funciones ${}_k\Psi$ y ${}_k\bar{\Psi}$ en la región $x \rightarrow -\infty$ ni a ${}_k\Phi$ y ${}_k\bar{\Phi}$ en $x \rightarrow \infty$

* La notación que usamos es la especificada en el Cap. 1, expresión 1-5 a, b, c

Ahora bien, cabe la posibilidad que existan algunas otras funciones que, solucionando la ec (B-1) a la vez tengan el mismo comportamiento asintótico indicado en (B-2) Esto crearía ambigüedad en un desarrollo matemático que se base en tales funciones. Para preveniros de estas dificultades se exigirán algunas propiedades más al potencial Q (adicional a la que ya se menciona en B-1). ¿Cómo son específicamente tales exigencias?, lo podemos averiguar si expresamos la ecuación diferencial (B-1) en forma de una ecuación integral.

1. La Ec. de Schrodinger en forma de Ec. integral

Empezaremos por expresar la ec. (B-1) como un sistema de 2 ec. diferenciales de primer orden

$$\text{Sea } f = {}_k Y \quad , \quad g = D {}_k Y \quad (B-3)$$

se cumple

$$D^2 {}_k Y + k^2 {}_k Y = Q {}_k Y \quad \Rightarrow \quad Dg + k^2 f = Qf$$

$$D {}_k Y = g \quad \Rightarrow \quad Df - g = 0$$

escribimos estas relaciones en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Df \\ Dg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ k^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

Así, la ec. (B-1), a través de la definición (B-3), es equivalente a

$$\mathbb{D} \mathbb{Y} + \mathbb{B}(k) \mathbb{Y} = \mathbb{Q} \mathbb{A} \mathbb{Y} \quad (\text{B-4})$$

donde

$$\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} ; \quad \mathbb{B}(k) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ k^2 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbb{D}$$

La solución de la ec. (B-4) que satisface la condición inicial

$$\mathbb{Y}(x_0) = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ g(x_0) \end{pmatrix}$$

estará dada por

$$\mathbb{Y}(x) = e^{-(x-x_0)\mathbb{B}(k)} \mathbb{Y}(x_0) + \int_{x_0}^x e^{-(x-v)\mathbb{B}(k)} \mathbb{Q}(v) \mathbb{A} \mathbb{Y}(v) dv \quad (\text{B-5})$$

donde

$$e^{-(x-x_0)\mathbb{B}(k)} = \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (x_0-x)^n \mathbb{B}^n(k) ;$$

Se verifica que $\mathbb{B}^2(k) = -k^2 \mathbb{I}$, con el cual

$$\mathbb{B}^{2n}(k) = (-1)^n k^{2n} \mathbb{I} , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

luego

$$\begin{aligned}
 e^{(x_0-x) B(k)} &= \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (x_0-x)^{2n} B^{2n}(k) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (x_0-x)^{2n+1} B^{2n+1}(k) \\
 &= \cos k(x_0-x) \mathbb{I} + \frac{1}{k} \operatorname{sen} k(x_0-x) B(k) \\
 e^{(x_0-x) B(k)} &= \begin{pmatrix} \cos k(x_0-x) & -\frac{1}{k} \operatorname{sen} k(x_0-x) \\ k \operatorname{sen} k(x_0-x) & \cos k(x_0-x) \end{pmatrix} \quad (B-6)
 \end{aligned}$$

Reemplazando en (B-5)

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos k(x_0-x) & -\frac{1}{k} \operatorname{Sen} k(x_0-x) \\ k \operatorname{Sen} k(x_0-x) & \cos k(x_0-x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ g(x_0) \end{pmatrix} + \\
 &+ \int_{x_0}^x Q(v) \begin{pmatrix} -\frac{1}{k} \operatorname{Sen} k(v-x) & 0 \\ \cos k(v-x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(v) \\ g(v) \end{pmatrix} dv \\
 \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos k(x_0-x) f(x_0) - \frac{1}{k} \operatorname{Sen} k(x_0-x) g(x_0) - \frac{1}{k} \int_{x_0}^x Q(v) \operatorname{Sen} k(v-x) f(v) dv \\ k \operatorname{Sen} k(x_0-x) f(x_0) + \cos k(x_0-x) g(x_0) + \int_{x_0}^x Q(v) \cos k(v-x) f(v) dv \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

en donde se verifica* que $g = Df$, este fue nuestro punto de partida en (B-3)

$$* \quad H(x) = \int_{x_0}^x G(v, x) dv \Rightarrow (DH)(x) = \int_{x_0}^x \frac{\partial G}{\partial x}(v, x) dv + G(x, x)$$

Así, hemos encontrado que

La solución de la ec. diferencial de Schrodinger, ec(B-1), que satisface las condiciones iniciales ${}_k Y(x_0), (D_k Y)(x_0)$ está dada en forma implícita a través de la siguiente ec. integral.

$${}_k Y(x) = {}_k Y(x_0) \text{Cos}k(x_0-x) - \frac{(D_k Y)(x_0)}{k} \text{Sen}k(x_0-x) - \frac{1}{k} \int_{x_0}^x Q(v) \text{Sen}k(v-x) {}_k Y(v) dv \quad (B-7)$$

2. Ecuaciones integrales que deben satisfacer las Funciones de Jost

FUNCION DE JOST ${}_k \Psi$: ${}_k \Psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \exp(ikx)$

En (B-7) damos las siguientes condiciones iniciales

$$\begin{aligned} {}_k \Psi(x_0) &= \exp(ikx_0) \\ (D_k \Psi)(x_0) &= ik \exp(ikx_0) \end{aligned} \quad (B-8a)$$

la ec. integral correspondiente es:

$$\begin{aligned} {}_k \Psi(x) &= \exp(ikx_0) \text{Cos}k(x_0-x) - i \exp(ikx_0) \text{Sen}k(x_0-x) - \frac{1}{k} \int_{x_0}^x Q(v) \text{Sen}k(v-x) {}_k \Psi(v) dv \\ &= \exp(ikx) + \frac{1}{k} \int_x^{x_0} Q(v) \text{Sen}k(v-x) {}_k \Psi(v) dv \end{aligned} \quad (B-8b)$$

la coordenada x_0 es tomada en la región $x \rightarrow \infty$, y así la ec. (15-a) suele expresarse como*

* El criterio para afirmar que estamos en la región $x \rightarrow \infty$ fue dado en el Cap.1, pág.5

$${}_k \Psi(x) = \exp(ikx) + \frac{1}{k} \int_x^\infty Q(v) \operatorname{Sen}k(v-x) {}_k \Psi(v) dv \quad (\text{B-8c})$$

FUNCION DE JOST ${}_k \Phi$: ${}_k \Phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \exp(-ikx)$

En (B-7) damos las siguientes condiciones iniciales

$${}_k \Phi(x_0) = \exp(-ikx_0) \quad (\text{B-9a})$$

$$\left(D {}_k \Phi \right) (x_0) = ik \exp(-ikx_0)$$

la ec. integral que debe satisfacer ${}_k \Phi$ es

$$\begin{aligned} {}_k \Phi(x) &= \exp(-ikx_0) \operatorname{Cos}k(x_0-x) + i \exp(-ikx_0) \operatorname{Sen}k(x_0-x) \frac{1}{k} \int_{x_0}^x Q(v) \operatorname{Sen}k(v-x) {}_k \Phi(v) dv \\ &= \exp(-ikx) - \frac{1}{k} \int_{x_0}^x Q(v) \operatorname{Sen}k(v-x) {}_k \Phi(v) dv \quad (\text{B-9b}) \end{aligned}$$

La coordenada x_0 la tomamos en la región $x_0 \rightarrow -\infty$; así la ec. B-9b) suele expresarse como

$${}_k \Phi(x) = \exp(-ikx) - \frac{1}{k} \int_{-\infty}^x Q(v) \operatorname{Sen}k(v-x) {}_k \Phi(v) dv \quad (\text{B-9c})$$

En forma similar se obtiene

$${}_k \bar{\Psi} = \exp(-ikx) + \frac{1}{k} \int_x^\infty Q(v) \operatorname{Sen}k(v-x) {}_k \bar{\Psi}(v) dv \quad (\text{B-10})$$

$${}_k \bar{\Phi}(x) = \exp(ikx) - \frac{1}{k} \int_{-\infty}^x Q(v) \operatorname{Sen}k(v-x) {}_k \bar{\Phi}(v) dv \quad (\text{B-11})$$

3. Condiciones bajo las cuales, las ecs. integrales a ser satisfechas por las funciones de Jost, admiten solución.

El camino usual para averiguar si una ecuación integral tiene solución es el método de aproximaciones sucesivas. A manera de ilustración, apliquémoslo a la ec. (B-9c)

$${}_k\phi(x) = e^{-ikx} - \frac{1}{k} \int_{-\infty}^x Q(v) \text{Sen}k(v-x) {}_k\phi(v) dv$$

Esta ec. es de la forma de una ec. integral de Volterra de segunda especie*

$${}_k\phi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^x N(x,v) {}_k\phi(v) dv \quad (\text{B-12})$$

Con $f(x) = \exp(-ikx)$, $N(x,v) = -\frac{1}{k} Q(v) \text{Sen}k(v-x)$ y $\lambda = 1$, se obtiene B-9c

En (B-12) busquemos la solución en forma de una serie de potencias de λ

$${}_k\phi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(x,k) \lambda^m \quad (\text{B-13})$$

La idea a seguir es: determinar los coeficientes $c_m(x,k)$ de la serie en base a que ${}_k\phi$ satisface la ec. integral (B-12) y, luego, averiguar bajo que condiciones la serie correspondiente a $\lambda = 1$ puede ser acotada. Si esto fuese po-

* Ver ref. 26, pág. 15, λ pertenece a un intervalo real.

sible, entonces la serie es convergente, o sea ϕ_k existe.
 Determinamos los coeficientes $c_m(x, k)$.

Reemplazando (B-13) en (B-12) resulta

$$\left[c_0(x, k) - f(x) \right] + \sum_{m=0}^{\infty} \left[c_{m+1}(x, k) - \int_{-\infty}^x N(x, v) c_m(v, k) dv \right] \lambda^{m+1} = 0, \quad \forall \lambda$$

esto implica

$$c_0(x, k) = f(x) = e^{-ikx} \tag{B-14}$$

$$c_{m+1}(x, k) = \int_{-\infty}^x N(x, v) c_m(v, k) dv \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

la serie correspondiente a $\lambda = 1$ en (B-13) es entonces

$$\phi_k(x) = e^{-ikx} + \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\infty}^x N(x, v) c_m(v, k) dv \tag{B-15}$$

En el posterior trabajo de acotar la serie (B-15), resultará más cómodo usar $\phi_k(x) \exp(ikx)$

$$\text{Sea } h_m(x, k) = \exp(ikx) c_m(x, k) \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{B-16}$$

reemplazando (B-14) en (B-15) y (B-16) resulta

$$\phi_k(x) \exp(ikx) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m(x, k) \tag{B-17}$$

$$h_0(x, k) = 1$$

$$h_{m+1}(x, k) = \int_{-\infty}^x N(x, v) h_m(v, k) dv; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Se procede ahora a acotar la serie (B-17); tomemos uno de los términos

$$h_{m+1}(x, k) = \int_{-\infty}^x -\frac{1}{k} Q(v) \text{Sen}k(v-x) \exp ik(x-v) h(v, k) dv$$

$$k = \xi + i \eta$$

$$\left| h_{m+1}(x, k) \right| \leq \int_{-\infty}^x \frac{1}{|k|} |Q(v)| \left| \text{Sen}k(v-x) \exp ik(x-v) \right| |h_m(v, k)| dv$$

los siguientes pasos son para demostrar (B-18)

usemos $u = v-x$. Como $v \in (-\infty, x)$ resulta que $u \in (-\infty, 0)$

$$\begin{aligned} \left| \text{Sen}(ku) \exp(-iku) \right| &\leq \frac{1}{2} \left[\left| \exp(iku) \right| + \left| \exp(-iku) \right| \right] \left| \exp(-iku) \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left[\exp(-\eta u) + \exp(\eta u) \right] \exp(\eta u), \quad k = \xi + i\eta \end{aligned}$$

puesto que $u < 0$, se cumple $\exp(\pm \eta u) \leq \exp(-|\eta| |u|)$. Así

$$\left| \text{Sen}(ku) \exp(-iku) \right| \leq \frac{1}{2} \left[2 \exp(-|\eta| |u|) \right] \exp(\eta u) = \exp(\eta - |\eta|) |u|$$

$$\text{Si } \eta \geq 0 \text{ entonces } \left| \text{sen}k(v-x) \exp ik(x-v) \right| \leq 1 \quad (\text{B-18})$$

Luego, se cumple

$$h_{m+1} \leq \int_{-\infty}^x \frac{1}{|k|} |Q(v)| |h_m(v, k)| dv, \quad \text{para } \text{Im} k \geq 0 \quad (\text{B-19})$$

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

A partir de esta relación de recurrencia, podemos demostrar el siguiente resultado interesante*

$$\left| c_m(x, k) \right| \leq \frac{1}{m!} \left[\frac{P(x)}{|k|} \right]^m, \quad \text{Im } k \geq 0 \quad (\text{B-20})$$

$$\text{donde } P(x) = \int_{-\infty}^x |Q(v)| dv$$

En (B-17) tendremos que, para $\text{Im } k \geq 0$ se cumple

* Ver demostración en el Anexo 1 al final de este complemento

$$\begin{aligned} {}_k\phi(x) \exp(ikx) &\leq 1 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m(x, k) \leq \\ &\leq 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\frac{P(x)}{|k|} \right]^m = \exp \left(\frac{P(x)}{|k|} \right) \end{aligned}$$

aseguramos la existencia de los valores de $P(x)$; $x \in \mathbb{R}$, existiendo

$$P_0 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |Q(v)| \, dv < \infty$$

y así

$$\left| {}_k\phi(x) \exp(ikx) \right| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |c_m(x, k)| \leq \exp \left| \frac{P_0}{|k|} \right|, \quad \text{para } \text{Im}'k \geq 0 \quad (\text{B-21})$$

Por lo tanto ${}_k\phi$, solución de la ec. integral (B-9c), existe.

El procedimiento que hemos seguido nos permite comprender resultados adicionales. La ref. 1 (pag.102 y siguientes), por ejemplo, nos conduce a $\left| {}_k\phi(k, x) \exp(ikx) - 1 \right| \leq M(x) \exp M(x)$ donde $M(x) = \int_{-\infty}^x (x-v) |Q(v)| \, dv$, de la cual concluyen analiticidad y continuidad de ${}_k\phi$, para $\text{Im } k > 0$ e $\text{Im } k \geq 0$ respectivamente, sobre cualquier intervalo $x \in (-\infty, a]$, $a < \infty$, si $\int_{-\infty}^{\infty} |v| |Q(v)| \, dv$. Todo ello concluye en el teorema 1 que hemos dado en la pág.14 de nuestro Capítulo 1.

4. Unicidad de las funciones de Jost

En la sección anterior hemos hecho referencia a las condiciones bajo las cuales las funciones de Jost existen, tales funciones son importantes pues con ellas el proceso de recobrar el potencial a partir de los parámetros de dispersión se torna bastante claro. Nos interesa entonces que ellas queden bien determinadas.

En esta sección queremos averiguar si, bajo las exigencias hechas en el teorema 1 (Cap.1 , pág.14), hay más de una función que tenga el mismo comportamiento asintótico que hemos exigido, por ejemplo, a la función ${}_k\Phi$

Sean ${}_k\Phi_1$, y ${}_k\Phi_2$ funciones que satisfagan la ec. (B-9c)

$${}_k\Phi_1(x) \exp(ikx) = 1 - \frac{1}{k} \int_{-\infty}^x Q(v) \operatorname{Sen}k(v-x) \exp ik(x-v) \exp(ikv) {}_k\Phi_1(v) dv$$

$${}_k\Phi_2(x) \exp(ikx) = 1 - \frac{1}{k} \int_{-\infty}^x Q(v) \operatorname{Sen}k(v-x) \exp ik(x-v) \exp(ikv) {}_k\Phi_2(v) dv$$

$$\begin{aligned} & \left[{}_k\Phi_1(x) - {}_k\Phi_2(x) \right] \exp(ikx) = \\ & = - \frac{1}{k} \int_{-\infty}^x Q(v) \operatorname{Sen}k(v-x) \exp ik(x-v) \left[{}_k\Phi_1(v) - {}_k\Phi_2(v) \right] \exp(ikv) dv \end{aligned}$$

$$\text{Sea } A_{(x,k)} = \left[{}_k\Phi_1(x) - {}_k\Phi_2(x) \right] \exp(ikx) ; k = \xi + i\eta \quad (\text{B-22})$$

$$A(x, k) = - \int_{-\infty}^x Q(v) \frac{\text{Sen}(v-x) \exp ik(x-v)}{k} A(v, k) dv$$

$$\leq \int_{-\infty}^x |Q(v)| \left| \frac{\text{sen}(v-x) e^{-ik(v-x)}}{k} \right| |A(v, k)| dv$$

Nótese que $u = v-x < 0$;

$$\left[\frac{\text{Sen}(ku) \exp(-iku)}{k} \right] = \left[\frac{\exp(iku) - \exp(-iku)}{2ik} \right] e^{-iku} = \frac{1 - e^{-2iku}}{2ik}$$

$$= \int_u^0 -e^{-2ikt} dt = \int_u^0 -e^{-2i\xi t} e^{2\eta t} dt$$

$$\left| \frac{\text{Sen}(ku) \exp(-iku)}{k} \right| \leq \int_u^0 \left| -\exp(-2i\xi t) \exp(2\eta t) \right| dt = \int_u^0 e^{2\eta t} dt$$

con $\text{Im}k = \eta \geq 0$ se cumple $e^{2\eta t} \leq 1$, pues $t < 0$

$$\left| \frac{\text{Sen}(ku) \exp(-iku)}{k} \right| \leq \int_u^0 dt = -u = (x-v)$$

$$|A(x, k)| \leq \int_{-\infty}^x |Q(v) A(v, k)| (x-v) dv \quad (\text{B-23})$$

$$\text{Sea } G(x, k) = \int_{-\infty}^x (x-v) |Q(v) A(v, k)| dv \geq 0 \quad (\text{B-24})$$

se cumple:

$$\circ |A(x, k)| \leq G(x, k)$$

$$\circ \frac{dG}{dx} = \int_{-\infty}^x |Q(v) A(v, k)| dv \geq 0 \quad (\text{B-25})$$

así, con respecto a x , G es una función no decreciente

Los siguientes pasos son para demostrar (B-26)

Para $v \in (-\infty, x]$ se cumple $|A(v, k)| \leq G(v, k) \leq G(x, k)$. Reemplazando en (B-25)

$$\frac{dG}{dx} \leq G(x, k) \int_{-\infty}^x |Q(v)| dv = G(x, k) \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x (x-v) |Q(v)| dv$$

$$\text{llamamos } q(x) = \int_{-\infty}^x (x-v) |Q(v)| dv$$

$$\frac{dG}{dx} - G(x, k) \frac{d}{dx} q \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exp[-q(x)] \frac{dG}{dx} - G \exp[-q(x)] \frac{dq}{dx} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} [G(x, k) \exp[-q(x)]] \leq 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^t \frac{d}{dx} [G(x, k) e^{-q(x)}] dx \leq 0, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

$$\Rightarrow \exp(-q(t)) G(t, k) - [G(x, t) e^{-q(x)}]_{x \rightarrow -\infty} \leq 0 \Rightarrow \exp(-q(t)) G(t, k) \leq 0$$

$$t \in \mathbb{R}$$

Luego

$$G(x, k) \leq 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{B-26})$$

De (B-24) y (B-26) se concluye $G(x, k) = 0$ para $x \in \mathbb{R}$

Usando este resultado en (B-25), obtenemos:

$$A(x,k) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

De (B-22) se concluye

$${}_k\phi_1(x) = {}_k\phi_2(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Teorema

Con las hipótesis del teorema 1, se cumple que las funciones de Jost son únicas

5. Comportamiento de Φ y Ψ cuando $|k| \rightarrow \infty$

En (B-9c) tenemos

$${}_k\phi(x) \exp(ikx) = 1 - \frac{1}{k} \int_{-\infty}^x Q(v) \operatorname{Senk}(v-x) \exp ik(x-v) \exp(ikv) {}_k\phi(v) dv$$

$$\left| {}_k\phi(x) \exp(ikx) - 1 \right| \leq \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^x |Q(v)| |\operatorname{Senk}(v-x) \exp ik(x-v)| |\exp(ikv) {}_k\phi(v)| dv$$

usando (B-18)

$$\leq \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^x |Q(v)| \left| {}_k\phi(v) \exp(ikv) \right| dv$$

usando (B-21)

$$\leq \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^x |Q(v)| \exp\left(\frac{P_0}{|k|}\right) = \frac{1}{|k|} \exp\left|\frac{P_0}{|k|}\right| \int_{-\infty}^x |Q(v)| dv$$

$$\left| \frac{\Phi(x, k) \exp(ikx) - 1}{|k|} \right| \leq \frac{P_0}{|k|} \exp\left(\frac{P_0}{|k|}\right) \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} 0$$

Por lo tanto

$$\Phi(x, k) \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} \exp(-ikx) \quad (\text{B-27})$$

En forma similar

$$\Psi(x, k) \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} \exp(ikx) \quad (\text{B-28})$$

6. Relación entre las funciones de Jost

Hemos visto en la sección 2 de este complemento que la ecuación integral, por ejemplo, para la función $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}(x, k)$ tiene validez sólo cuando $\text{Im } k < 0$. Sin embargo el valor $\bar{\Phi}(x, k^*)$ (k^* significa el conjugado complejo de k) sí tiene sentido cuando $\text{Im } k > 0$, y cabe sospechar que tal valor coincide con $\Phi(x, k)$, o quizás NO.

Este tipo de relaciones son las que se buscan en esta sección.

Empecemos con $\Phi(x, k)$ y $\bar{\Phi}(x, k^*)$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(x, \alpha) &= \exp(i\alpha x) - \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^x Q(v) \text{sen} \alpha(v-x) \bar{\Phi}(v, \alpha) dv \\ &= \exp(i\alpha x) - \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^x Q(v) \frac{\exp(i\alpha(v-x)) - \exp(i\alpha(x-v))}{2i} \Phi(v, \alpha) dv \end{aligned}$$

Para $\text{Im } \alpha \leq 0$

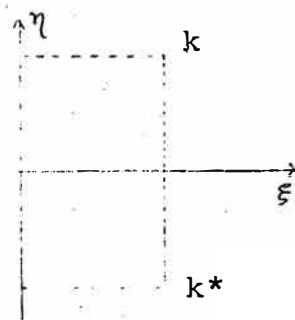
$$\Phi(x, k^*) = \exp(ik^*x) - \frac{1}{k^*} \int_{-\infty}^x Q(v) \frac{e^{ik^*x(v-x)} - e^{-ik^*(v-x)}}{2i} \bar{\Phi}(v, k^*) dv$$

donde $\text{Im}k \geq 0$

$$\Phi^*(x, k^*) = \exp(-ikx) - \frac{1}{k} \int_{-\infty}^x Q(v) \frac{\exp -ik(v-x) - \exp ik(v-x)}{-2i} \bar{\Phi}^*(v, k^*) dv$$

$$= \exp(-ikx) - \frac{1}{k} \int_{-\infty}^x Q(v) \text{Sen}k(v-x) \bar{\Phi}^*(v, k^*) dv; \quad \text{Im}k \geq 0$$

Esta ecuación integral tiene la misma forma que aquella para $\Phi(x, k)$. Como la solución es única (ver sección 3) concluimos que



$$\Phi(x, k) = \bar{\Phi}^*(x, k^*) \quad (\text{B-29})$$

para $\text{Im}k \geq 0$

Otra relación puede intuirse luego del siguiente razonamiento. Si $\text{Im}k \geq 0$, también $\text{Im}(-k^*) \geq 0$, luego cabe la posibilidad que exista alguna relación entre $\Phi(x, k)$ y $\Phi(x, -k^*)$

$$\Phi(x, -k^*) = \exp(ik^*x) - \frac{1}{-k^*} \int_{-\infty}^x Q(v) \frac{\exp(-ik^*(v-x)) - \exp ik^*(v-x)}{2i} \Phi(v, -k^*) dv$$

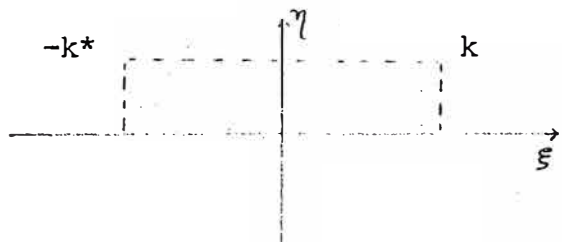
la cual no coincide con la ec. para $\Phi(x, k)$, sin embargo si tomamos el valor conjugado completo obtenemos

$$\Phi^*(x, -k^*) = \exp(-ikx) - \frac{1}{-k} \int_{-\infty}^x Q(v) \frac{\exp ik(v-x) - \exp -ik(v-x)}{-2i} \Phi^*(v, -k^*) dv$$

$$= \exp(-ikx) - \frac{1}{k} \int_{-\infty}^x Q(v) \operatorname{Sen}k(v-x) \Phi^*(v, -k^*) dv$$

que es la misma ecuación integral a ser satisfecha por $\Phi(x, k)$

Como la solución es única, debe cumplirse que



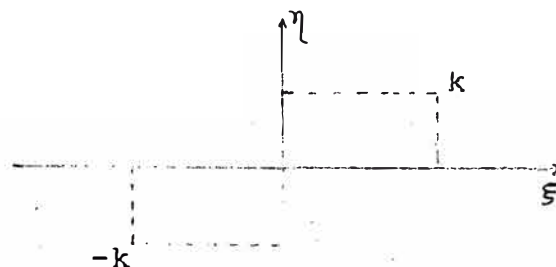
$$\Phi(x, k) = \Phi^*(x, -k^*) \quad (\text{B-29b})$$

para $\operatorname{Im}k \geq 0$

También, con $\operatorname{Im}k \geq 0$ se tiene $\operatorname{Im}(-k) \leq 0$ y esperamos haya una relación entre $\Phi(x, k)$ y $\bar{\Phi}(x, -k)$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(x, -k) &= e^{-ikx} - \frac{1}{-k} \int_{-\infty}^x Q(v) \frac{e^{-ik(v-x)} - e^{ik(v-x)}}{2i} \bar{\Phi}(v, -k) dv \\ &= e^{-ikx} - \frac{1}{k} \int_{-\infty}^x Q(v) \frac{e^{ik(u-x)} - e^{-ik(u-x)}}{2i} \bar{\Phi}(v, -k) dv \end{aligned}$$

que es la misma ecuación integral a ser satisfecha por $\bar{\Phi}(x, k)$



$$\bar{\Phi}(x, k) = \bar{\bar{\Phi}}(x, -k) \quad (\text{B-29c})$$

para $\operatorname{Im}k \geq 0$

Idénticos resultados se obtienen para Ψ y $\overline{\Psi}$

$$\begin{aligned}
 \phi(x, k) &= \phi(x, -k) & \Psi(x, k) &= \overline{\Psi}(x, -k) \\
 &= \overline{\phi}^*(x, k^*) & &= \overline{\Psi}^*(x, k^*) \\
 &= \phi^*(x, -k^*) & &= \Psi^*(x, -k^*)
 \end{aligned}
 \tag{B-30}$$

7. El Wronskiano de 2 soluciones de la Ecuación de Schrodinger

Wronskiano

Para $f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, continuas y de derivada también continua. Definimos el Wronskiano de estas funciones

$$W(f, g) \equiv f Dg - g Df \tag{B-31}$$

Aplicaremos el resultado

$$\begin{aligned}
 &f, g \text{ son linealmente} \\
 &\text{independientes} \iff W(f_1, f_2) \neq 0
 \end{aligned}
 \tag{B-32}$$

a dos funciones que son soluciones de la ec. de Schrodinger

Sea:

$$\begin{aligned}
 -D_k^2 f + Q_k f &= k^2 f \\
 D_x^2 g + Q_x g &= \gamma^2 g
 \end{aligned}
 \tag{B-33 a}$$

Multiplicando la primera por y^g y la segunda por k^f , para luego restar

$$y^g D_k^2 f - k^f D_y^2 g = (y^2 - k^2) k^f y^g$$

$$D \left[y^g D_k f - k^f D_y g \right] = (y^2 - k^2) k^f y^g$$

$$D W(g, k^f) = (y^2 - k^2) k^f y^g \quad (\text{B-33b})$$

Este resultado nos indica que, si en (B-33a) tuviéramos 2 funciones solución, correspondientes a un mismo autovalor, $k^2 = y^2$, entonces el wronskiano de ambas funciones es una función constante.

$$\left(W(k^g, k^f) \right) (x) = \left(W(k^g, k^f) \right) (x_0) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{B-34})$$

Siendo nuestro interés obtener toda la información posible a partir de lo que se conozca en las regiones asintóticas, escogemos x_0 en tal región ($|x| \longrightarrow \infty$) y así

Conociendo el valor que toma el wronskiano en un punto x_0 perteneciente a la región $|x| \longrightarrow \infty$, conoceremos el valor que toma en cualquier otra región: es el mismo.

Aplicación.-

Sea $Imk = 0$, $k \neq 0$. En este caso podemos trabajar con

las funciones de Jost Ψ y $\overline{\Psi}$ simultáneamente.

Para x_0 en la región $x \longrightarrow \infty$ se tiene

$$\begin{aligned} \Psi(x_0, k) &= \exp(ikx_0) & \overline{\Psi}(x_0, k) &= \exp(-ikx_0) \\ (D\Psi)(x_0, k) &= ik\exp(ikx_0) & (D\overline{\Psi})(x_0, k) &= -ik\exp(-ikx_0) \end{aligned}$$

reemplazando en (B-31), obtenemos que

$$W({}_k\Psi, {}_k\overline{\Psi})(x_0) = -2ik$$

Usando los resultados (B-32) y (B-34) concluimos

Para $\text{Im}k = 0$, $k \neq 0$, se cumple

$$\bullet W({}_k\Psi, {}_k\overline{\Psi})(x) = -2ik, \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{B-35})$$

$\bullet {}_k\Psi, {}_k\overline{\Psi}$ linealmente independientes

Si elegimos x_0 en la región $x_0 \longrightarrow -\infty$ obtenemos un resultado similar

Para $\text{Im}k = 0$, $k \neq 0$ se cumple

$$\bullet W({}_k\Phi, {}_k\overline{\Phi})(x) = 2ik \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{B-36})$$

$\bullet {}_k\Phi, {}_k\overline{\Phi}$ son linealmente independientes

El resultado (B-35) ha sido sencillo de obtener debido a que se conoce el comportamiento asintótico tanto de ${}_k\Psi$ como de ${}_k\overline{\Psi}$ en la misma región $x \longrightarrow \infty$. Para (B-36) ocurrió lo mismo. Sin embargo ¿cuánto vale $W({}_k\Psi, {}_k\Phi)$?, en este caso se cono

ce el comportamiento asintótico de ${}_k\Psi$ en $x \longrightarrow \infty$ pero no el de ${}_k\Phi$. Esta discusión la posponemos para el próximo complemento.

ANEXO 1 La demostración de (B-20) es por inducción

En (B-19), como $h_0(v, k) = 1$, se verifica

$$|h_1(x, k)| \leq \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^x |Q(v)| = \frac{1}{|k|} P(x)$$

luego, (B-20) es válida para $m = 1$

Sea ella válida para algún número natural $m = n$

$$|h_n(x, v)| \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{P(x)}{k} \right)^n$$

mostremos entonces que (B-20) será también válida para $m = n+1$

$$\begin{aligned} |h_{n+1}(x, k)| &\leq \int_{-\infty}^x \frac{1}{|k|} |Q(v)| |h_n(v, k)| dv \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^x \frac{1}{|k|} |Q(v)| \frac{1}{n!} \left(\frac{P(v)}{|k|} \right)^n dv \end{aligned}$$

pero $|Q(x)| = \frac{dP}{dx}$

$$|h_{n+1}(x, k)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{|k|^{n+1}} [P^{n+1}(x) - P^{n+1}(-\infty)] = \frac{1}{(n+1)!} \frac{P^{n+1}(x)}{|k|^{n+1}}$$

COMPLEMENTO C

INTERPRETACION DEL FENOMENO DE DISPERSION MEDIANTE LAS
FUNCIONES DE JOST

INTERPRETACION DEL FENOMENO DE DISPERSION MEDIANTE

LAS FUNCIONES DE JOST

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad \text{Ec. de Schrodinger}$$

Trabajando con potenciales independientes del tiempo, busca soluciones de la forma

$$\psi(x,t) = f(x) \exp(-i \frac{E}{\hbar} t) \quad (\text{C-1})$$

la función f debe satisfacer

$$-\frac{\hbar^2}{2m} D^2 f + Vf = E f$$

para mayor comodidad usamos $Q(x) = \frac{2m}{\hbar^2} V(x)$, $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$,

$$-D^2 f + Qf = k^2 f, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \quad (\text{C-2})$$

Las exigencias que hacemos al potencial Q están consideradas en la hipótesis del teorema 1 (Cap. 1, págs. 13 y 14).

Como $Q(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$, el comportamiento de f en tal región estará gobernado por la ecuación

$$D^2 f + k^2 f = 0$$

y así

$$f = A \exp(-ikx) + B \exp(ikx), \quad \text{para } |x| \rightarrow \infty \quad (\text{C-3})$$

donde A, B se escogen arbitrariamente y k es, en general, un número complejo.

PARTE 1. Trabajaremos con k real

Teniendo en cuenta la dependencia temporal indicada en (C-1) la expresión (C-3) muestra para el caso $k > 0$, una onda desplazándose hacia la derecha, $\exp(ikx)$, y otra hacia la izquierda, $\exp(-ikx)$

1.1 Ondas incidentes provenientes de la región $x \longrightarrow \infty$

En la Fig. -1- se esquematiza un fenómeno de dispersión y lo que deseamos es encontrar una función, solución de la ecuación de Schrodinger, que describa analíticamente tal fenómeno

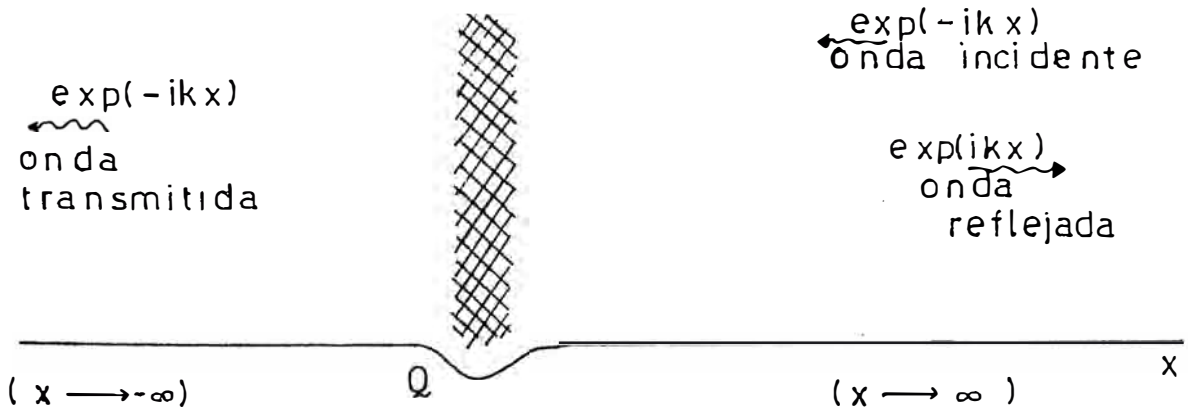


Fig. 1 Fenómeno de dispersión originado por un tren de ondas incidentes al interactuar con el potencial ($k > 0$)

Nótese que lo identificado como ondas incidente, reflejada y transmitida tiene la misma forma del comportamiento asintótico de las funciones de Jost y, precisamente, para describir analíticamente este fenómeno de dispersión es que haremos uso de ellas.

La Fig. 1 puede ser mostrada en la forma

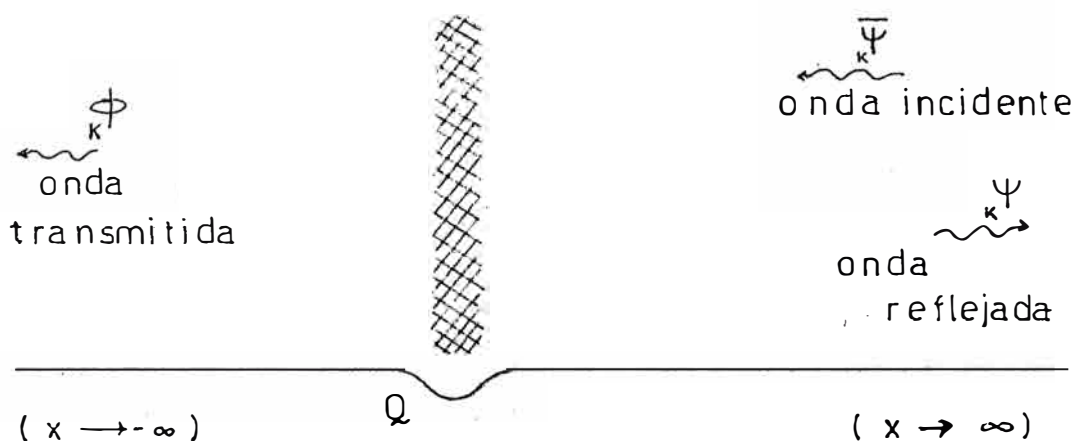


Fig. 2 Fenómeno de dispersión descrito en términos de las Funciones de Jost

Usando el resultado (B-35) tenemos que, para un valor fijo de k real no nulo, $\{ {}_k\Psi, {}_k\bar{\Psi} \}$ constituye una base del espacio de soluciones de la ecuación (C-2). Siendo ${}_k\Phi$ otra de sus soluciones, entonces ella podrá ser expresada como una combinación lineal de aquellas.

$${}_k\Phi(x) = a(k) {}_k\bar{\Psi}(x) + b(k) {}_k\Psi(x), \quad k \text{ real} \quad (C-4)$$

Usando el segundo miembro de esta igualdad, se verifica

$$\begin{array}{ccc}
 {}_k\phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} & a(k) \exp(-ikx) + b(k) \exp(ikx) & \\
 & \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow & \\
 & \text{onda} & \text{onda} \\
 & \text{incidente} & \text{reflejada}
 \end{array}$$

y usando el primer miembro

$${}_k\phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \exp(-ikx) \text{ , onda transmitida}$$

lo cual nos permite concluir que, para k real no nulo, la función de Jost ${}_k\phi$ interpreta analíticamente el fenómeno de dispersión de la Fig. 1

En (C-4) despejemos los valores de a(k) y b(k)

$${}_k\phi = a(k) {}_k\bar{\psi} + b(k) {}_k\psi$$

$$D {}_k\phi = a(k) D {}_k\psi + b(k) D {}_k\psi$$

$$a(k) = \frac{W({}_k\phi, {}_k\psi)}{W({}_k\bar{\psi}, {}_k\psi)} = \frac{W({}_k\phi, {}_k\psi)}{2ik} \text{ , k real} \quad (C-5)$$

$$b(k) = \frac{W({}_k\bar{\psi}, {}_k\phi)}{W({}_k\bar{\psi}, {}_k\psi)} = \frac{W({}_k\bar{\psi}, {}_k\phi)}{2ik}$$

En física es más usual identificar en un fenómeno de dispersión, los coeficientes de reflexión y transmisión; para lo cual la expresión (C-4) la escribimos en la forma

$$T(k) \frac{\psi}{k} (x) = \frac{\psi}{k} (x) + R(k) \frac{\psi}{k} (x) \quad , k \text{ real} \quad (C-6)$$

donde

$$T(k) = \frac{1}{a(k)} \quad \text{coeficiente de transmisión}$$

$$R(k) = \frac{b(k)}{a(k)} \quad \text{coeficiente de reflexión}$$

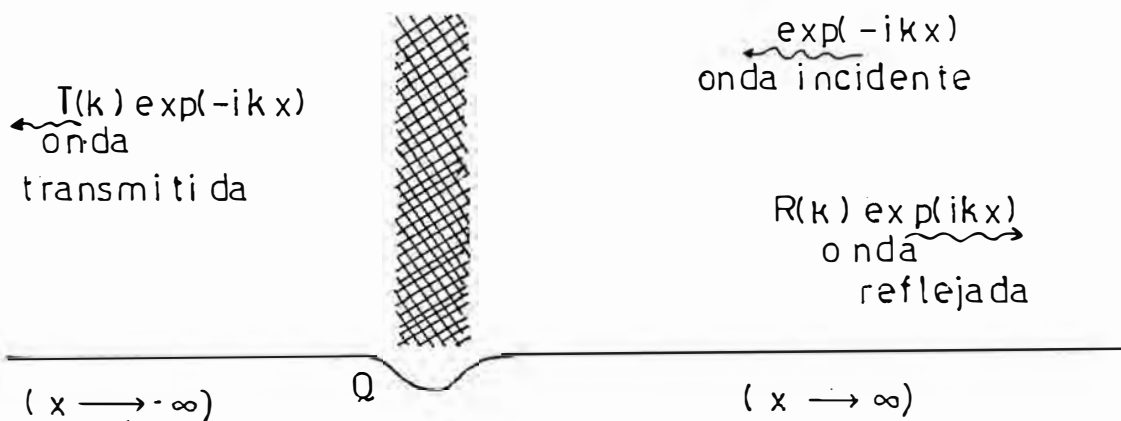
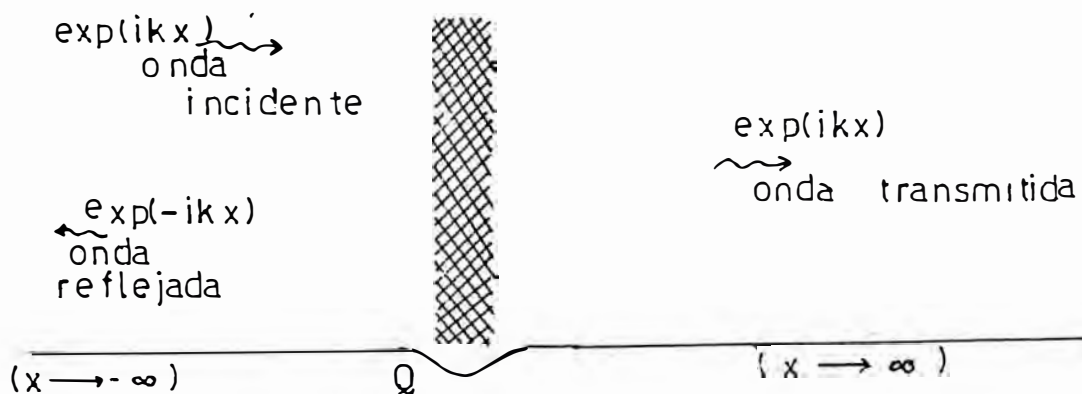


Fig. 3 Fenómeno de dispersión descrito por (C-6)

1.2 Ondas incidentes provenientes de la región $x \longrightarrow -\infty$.

En forma similar se estudia el siguiente caso



De acuerdo a (B-36), para k real no nulo, $\left\{ \phi_k, \bar{\phi}_k \right\}$ constituye una base del espacio de las soluciones de la Ec.(C-2), siendo ψ_k otra de las soluciones, ella se puede expresar como una combinación lineal de aquellas.

$$\psi_k(x) = \bar{a}(k) \bar{\phi}_k(x) + \bar{b}(k) \phi_k(x) \quad , \quad k \text{ real} \quad (C-7)$$

donde $\bar{a}(k)$ no indica al conjugado complejo de $a(k)$ ni alguna otra operación hecha con $a(k)$, es simplemente un nuevo coeficiente que debemos determinar.

En (C-7) se cumple

$$\psi_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \bar{a}(k) e^{ikx} + \bar{b}(k) e^{-ikx}$$

$\uparrow\uparrow$
 onda
 incidente

$\uparrow\uparrow$
 onda
 reflejada

$$\psi_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \exp(ikx) \quad \text{onda transmitida}$$

de manera que, para k real no nulo, la función de Jost ψ_k describe analíticamente al fenómeno de dispersión de la Fig. 4.

A partir de (C-7) despojamos los valores de $\bar{a}(k)$ y $\bar{b}(k)$

$$\bar{a}(k) = \frac{W(\phi_k, \psi_k)}{2ik} \quad , \quad \bar{b}(k) = \frac{W(\psi_k, \bar{\phi}_k)}{2ik} \quad (C-8)$$

Cabe definir también los correspondientes coeficientes de transmisión \bar{T} y reflexión \bar{R}

$$\bar{T}(k) = \frac{1}{\bar{a}(k)} \quad , \quad \bar{R}(k) = \frac{\bar{b}(k)}{\bar{a}(k)}$$

y así (C-7) puede expresarse en la forma

$$\bar{T}(k) \Psi_k(x) = \bar{\Phi}_k(x) + \bar{R}(k) \Phi_k(x) \quad k \text{ real} \quad (\text{C-9})$$

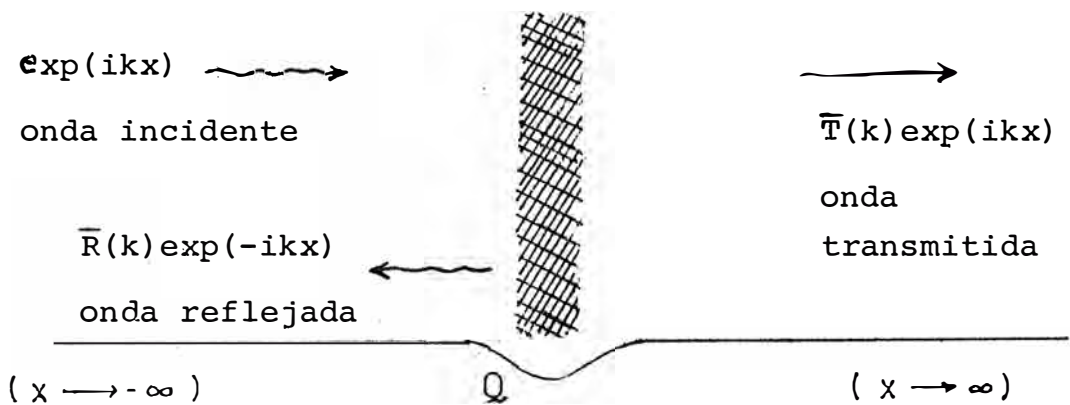


Fig. 5 Fenómeno de dispersión descrito por C-9)

¿ Los coeficientes de reflexión y transmisión $R(k)$ y $T(k)$ que aparecen en la fig. 3, serán respectivamente iguales a los de la fig. 5 $\bar{R}(k)$, $T(k)$?

En el Anexo 1, al final de este complemento, demostramos

$$\begin{aligned}
 R(k)^2 + T(k)^2 = 1 \quad ; \quad T(k) = T^*(-k) \\
 R(k) = R^*(-k)
 \end{aligned}
 \tag{C-10}$$

Idénticas relaciones entre si cumplen T(k) y P(k)
También

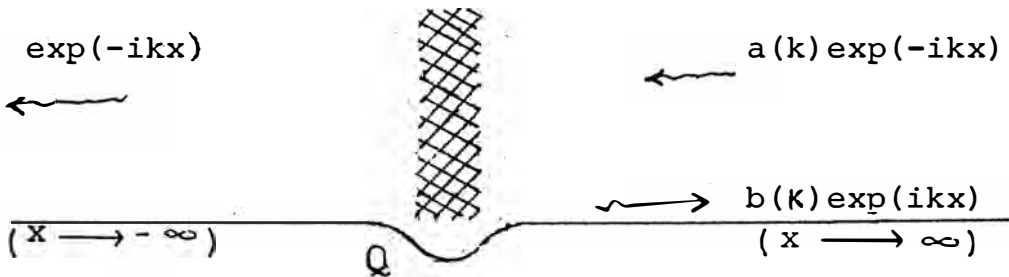
$$\begin{aligned}
 a(k) = a(k) \quad \text{y así} \quad T(k) = T(k) \\
 b(k) = -b(-k) \quad R(k) = \frac{b(-k)}{a(k)}
 \end{aligned}
 \tag{C-11}$$

PARTE 2 Trabajaremos con valores de k complejos

$$k = \xi + i\eta \quad , \quad \eta \gg 0$$

2.1 Estados ligados

Hemos visto en la parte 1, expresión C-4, que para valores de x real la función de Jost ϕ_k describe analíticamente el siguiente fenómeno de dispersión



Para k real

$$\phi_k(x) = \begin{cases} \exp(-ikx) & x \longrightarrow -\infty \\ a(k) \exp(-ikx) + b(k) \exp(ikx) & x \longrightarrow \infty \end{cases}$$

y según (C-10), a(k) ≠ 0 para todo valor de k real.

La validez de estos resultados que acabamos de mencionar, tuvieron su punto de partida en (C-4). Ahora no podemos usar esta expresión puesto que el uso de las funciones ψ_k tiene sentido cuando $\text{Im}k \leq 0$, y el de las funciones ψ_k cuando $\text{Im}k \geq 0$ (ver Teorema 1 del Cap. 1, pág. 14)

Sin embargo, la expresión (C-3) no hace distinción a los posibles valores de k , el comportamiento asintótico que allí se indica lo tiene toda solución de Schrodinger (C-2). Valores particulares de A y B distinguen una función de otra.

En base a esto, nos está permitido buscar una función de Jost, solución de (C-2), que tenga el siguiente comportamiento asintótico

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \exp(-ikx) & x \longrightarrow -\infty \\ a(k)\exp(-ikx) + b(k)\exp(ikx) & x \longrightarrow \infty \end{cases} \quad (\text{C-12})$$

para $k = \xi + i\eta$, $\eta > 0$ (k fijo)

Nuestro interés: ¿Describe ψ_k un estado ligado?

Por estado ligado entendemos lo siguiente:

Def.:

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

describe un estado ligado \iff

f es solución, no nula, de la ec. de Schrodinger, y además $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$

Una condición necesaria para que f describe un estado ligado es que se anule en la región $|x| \rightarrow \infty$. ¿Cumple ${}_k \phi$ con este requisito? La expresión (C-12) indica que esto será posible sólomente si, para tal valor de k , el coeficiente $a(k)$ es nulo. Así, la búsqueda de estados ligados significa el estudio de la función "a"

Por lo pronto sabemos que

$$\begin{array}{l}
 {}_{k_j} \phi \text{ describe un estado} \\
 \text{ligado}
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 a(k_j) = 0, \text{Im}k_j > 0$$

(C-13)

2.2. Expresiones análticas para $a(k)$

◦ Resulta interesante ver como la ecuación integral para ϕ deja ya traslucir el comportamiento asintótico que se le exige en (C-12)

$$\begin{aligned}
 {}_k \phi(x) &= \exp(-ikx) - \frac{1}{k} \int_{-\infty}^x Q(v) \text{Sen}k(v-x) {}_k \phi(v) dv \\
 &= \exp(-ikx) - \frac{1}{k} \int_{-\infty}^x Q(v) \frac{\exp(ik(v-x)) - \exp(-ik(v-x))}{2i} {}_k \phi(v) dv
 \end{aligned}$$

A partir de esta expresión (y procediendo de una manera no muy formal) podemos obtener el comportamiento asintótico de

$$\begin{aligned}
 & {}_k \phi \\
 & {}_k \phi(x) \left\{ \begin{array}{ll} e^{-ikx} & x \longrightarrow -\infty \\ \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} Q(v) \frac{\exp(ikv)}{2ik} {}_k \phi(v) dv \right] \exp(-ikx) + \\ + \left[\int_{-\infty}^{\infty} Q(v) \frac{\exp(-ikv)}{2ik} {}_k \phi(v) dv \right] \exp(ikx) & x \longrightarrow \infty \end{array} \right.
 \end{aligned}
 \tag{C-14}$$

Identificando términos en (C-17) y (C-14) resulta

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} Q(v) \exp(ikv) {}_k \phi(v) dv
 \tag{C-15}$$

$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} Q(v) \exp(-ikv) {}_k \phi(v) dv$$

donde $k = \xi + i\eta$, $\eta \geq 0$

o. Hay otra manera de expresar el valor de $a(k)$, ella utiliza la propiedad de que el wronskiano de dos soluciones de la ecuación de Schrodinger (C-2), que corresponden al mismo autovalor k^2 , es una función constante (ver resultado B-34)

En este caso usaremos ${}_k \Psi$ y ${}_k \phi$

De la primera función sabemos que

$$\Psi_k(x) = \exp(ikx) \quad \text{en } x \longrightarrow \infty$$

y de la segunda, la expresión (C-12) nos indica

$$\phi_k(x) = a(k)\exp(-ikx) + b(k)\exp(ikx) \quad \text{en } x \longrightarrow \infty$$

Para evaluar el valor constante que toma el wronskiano, tomemos un valor x_0 perteneciente a la región $x \longrightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \left\{ W(\phi_k, \Psi_k) \right\} (x) &= \left\{ W(\phi_k, \Psi_k) \right\} (x_0) \\ &= \phi_k(x_0) \left[D \Psi_k \right] (x_0) - \Psi_k(x_0) \left[D \phi_k \right] (x_0) \\ &= 2ika(k) \quad ; \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Luego

$$a(k) = \frac{W(\phi_k, \Psi_k)}{2ik} \quad ; \quad k = \xi + i\eta \quad , \quad \eta \geq 0 \quad (C-16)$$

2.3 PROPIEDADES ANALITICAS PARA LOS ESTADOS LIGADOS

2.3 Propiedades Analíticas para los Estados Ligados

o. Cuando ϕ_{k_j} describe un estado ligado, C-13 nos indica $a(k_j) = 0$. Para este mismo valor k_j la función de Jost ψ_{k_j} es también solución de la ec. de Schrodinger y, según C-16, $W(\psi_{k_j}, \phi_{k_j}) = 0$ Luego

Si ϕ_{k_j} describe un estado ligado entonces ϕ_{k_j} y ψ_{k_j}

son linealmente dependientes

$$\phi_{k_j} = b_j \psi_{k_j} \quad (C-17)$$

o. En (C-16) se expresa $a(k)$ en términos de las funciones de Jost, de las cuales conocemos sus propiedades analíticas.

Luego:

Con la hipótesis del Teorema 1 (Cap. 1, pág. 14), para la función "a" se cumple

$$a(k) \text{ es continua en } \text{Im}k \geq 0 \quad (C-18)$$

$$a(k) \text{ es analítica en } \text{Im}k > 0$$

o. Ahora, de las funciones analíticas sabemos que los valores $k = k_j$ en las cuales ellas se anulan, son puntos aislados en el plano complejo. En nuestro caso particular, ¿en cuántos de estos puntos $k = k_j$ se cumple $a(k_j) = 0$?

Para averiguarlo haremos uso de la expresión (C-15). La idea a seguir es demostrar que $a(k) \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} 1$ lo cual nos indicará que sólo existe un número finito de valores k_j , pues ellos toman solamente valores discretos.

$$a(k) - 1 = \frac{-1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} Q(v) \exp(ikv) {}_k\phi(v) dv$$

$$|a(k) - 1| \leq \frac{1}{2|k|} \int_{-\infty}^{\infty} |Q(v)| |\exp(ikv) {}_k\phi(v)| dv$$

$$\text{usando (B-22) } |\exp(ikv) {}_k\phi(v)| \leq \exp\left(\frac{P_0}{|k|}\right)$$

$$\text{donde } P_0 = \int_{-\infty}^{\infty} |Q(v)| dv, \text{ resulta}$$

$$|a(k) - 1| \leq \frac{1}{2} \frac{P_0}{|k|} \exp\left(\frac{P_0}{|k|}\right) \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} 0$$

Luego

$$a(k) \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} 1 \quad \text{y} \quad \text{(C-19)}$$

$a(k_j) = 0$ sólo para un número finito

de valores $k = k_j$, $j = 1, 2, \dots, N$, $\text{Im}k_j > 0$

o. ¿En que parte del plano complejo están situados los k_j ?

Veremos ahora el rol que juega el hecho de exigir que el potencial Q sea real

Supongamos que $k_j \phi$ describa un estado ligado ($\text{Im}k_j > 0$)

$$-D^2 k_j \phi + Q k_j \phi = k_j^2 k_j \phi, \quad k_j = \xi_j + i\eta_j$$

tomando los valores conjugados complejos

$$-D^2 k_j^* \phi^* + Q k_j^* \phi^* = (k_j^*)^2 k_j^* \phi^*, \quad \text{para } Q \text{ real}$$

multiplicando estas expresiones por $k_j \phi^*$ y $k_j^* \phi$ respectivamente, y luego restarlas, obtenemos:

$$D \left\{ k_j \phi^* D k_j \phi - k_j^* \phi^* D k_j \phi \right\} = (k_j^2 - k_j^{*2}) k_j \phi^* k_j \phi$$

integrando desde $-\infty$ hasta ∞

$$k_j \phi^* D k_j \phi - k_j^* \phi^* D k_j \phi = (k_j^2 - k_j^{*2}) \int_{-\infty}^{\infty} |k_j \phi(x)|^2 dx$$

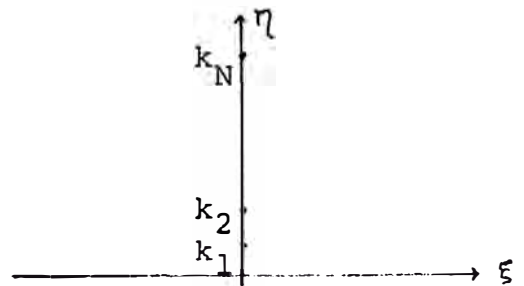
Como $k_j \phi$ describe un estado ligado, $k_j \phi(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$

$$(k_j^2 - k_j^{*2}) \int_{-\infty}^{\infty} |k_j \phi(x)|^2 dx = 0$$

la integral es no nula,

$$4i\xi_j\eta_j = (k_j^2 - k_j^{*2}) = 0$$

$$\eta_j = \text{Im}k_j > 0 \Rightarrow \xi_j = 0$$



Luego

Los valores k_j , para los cuales ϕ_{k_j} describe un estado ligado están situados a lo largo del eje imaginario del plano complejo, cuando el potencial Q es real.

De esta manera podemos complementar el resultado (C-13)

- k_j describe un estado ligado \Rightarrow $a(k_j) = 0$
 \Rightarrow $\text{Real } k_j = 0$ (C-20)
- El potencial Q , en la ec. (C-2), es real \Rightarrow $\text{Im } k_j > 0$

Comentario.- En el estudio de los fenómenos no lineales se suele desdoblarse el problema en un par de ecuaciones de primer orden (en forma similar a como hemos hecho en B-4) muchas de las cuales son equivalentes a la ec. de Schrodinger, Ec. C-2, pero con potencial complejo. Esto da lugar a resultados un poco diferentes, como por ejemplo, que los k_j no necesariamente están situados a lo largo del eje imaginario. (Ver Ref. 2, Págs. 67, 73, 160, sgtes).

- Las funciones de Jost ϕ_{k_j} , ψ_{k_j} son reales

El resultado (B-30) indica

$$\phi(x, k) = \phi^*(x, -k^*) \qquad \psi(x, k) = \psi^*(x, -k^*)$$

Con $k_j = i\eta_j$ se cumple $-k_j^* = k_j$, Luego:

$$\phi(x, k_j) = \phi^*(x, k_j) \quad \psi(x, k_j) = \psi^*(x, k_j) \quad (C-21)$$

En (C-17), la constante de proporcionalidad b_j , entonces, es real.

$$k_j \phi = b_j k_j \psi \quad ; \quad b_j \text{ real} \quad (C-21b)$$

2.4 Estudio de los polos de la función "T"

En el proceso de recuperación del potencial a partir de los parámetros de dispersión, se presenta el problema de evaluar integrales del tipo: (ver expresión D-23)

$$J(y) = \int_{\Gamma} T(k) \phi(x, k) \exp(iyx) dk$$

donde

$$T(k) = 1/a(k) \quad , \quad \text{Im}k \geq 0$$

Γ es una curva cerrada (semicircunferencia) contenida en el semiplano $\text{Im}k \geq 0$, en cuyo interior se encuentran todos aquellos valores $k = k_j$ para los cuales $a(k_j) = 0$

Como "a" es una función analítica que se anula en un número finito N de puntos $k = k_j$, entonces la función T tiene polos en dichos puntos

$$|T(k)| \xrightarrow[k \rightarrow k_j]{} \infty$$

A fin de facilitar la posterior evaluación de la integral $J(y)$, (esto se hará en el complemento D), en esta sección usaremos llevar a cabo dos cosas: 1ra. Evaluar la primera derivada de la función "a" en k_j , lo cual denotaremos con $a'(k_j)$ y 2do. demostrar que, como $a'(k_j) \neq 0$, los polos de la función T son de primer orden.

o. Cálculo de $a'(k_j)$

En (C-16), $2ika(k) = \left\{ W(\phi_k, \psi_k) \right\} (x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Para mayor simplicidad usemos

$$Y(x, k) = {}_k Y(x), \quad \psi_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi_k = \frac{\partial \psi}{\partial k}$$

Luego

$$2ika(k) = (\phi \psi_x - \psi \phi_x)(x, k), \quad x \in \mathbb{R}$$

derivando con respecto a k

$$2ia(k) + 2ika'(k) = \left(W(\phi, \psi_k) + W(\phi_k, \psi) \right) (x, k)$$

evaluando en $k = k_j$

$$2ik_j a'(k_j) = \left(W(\phi, \psi_k) + W(\phi_k, \psi) \right) (x, k_j), \quad x \in \mathbb{R} \quad (C-22)$$

nos será útil ahora el siguiente resultado (su demostración

la damos al final de presente complemento, en el Anexo 2)

$$W(\phi_k, \psi) (\infty, k_j) = W(\phi_k, \psi) (-\infty, k_j) + \frac{2k_j}{b_j} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x, k_j) dx \quad (C-23)$$

pues, eligiendo en (C-22) un x en la región $x \rightarrow \infty$

$$2ik_j a'(k_j) = \left\{ W(\phi, \psi_k) + W(\phi_k, \psi) \right\} (\infty, k_j)$$

y reemplazando aquí (C-23), obtenemos

$$2ik_j a'(k_j) = \left\{ W(\phi, \psi_k) \right\} (\infty, k_j) + \left\{ W(\phi_k, \psi) \right\} (-\infty, k_j) + \frac{2k_j}{b_j} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x, k_j) dx \quad (C-24)$$

usando (C-17)

$$\begin{aligned} 2ik_j a'(k_j) &= \left\{ W(b_j \psi, \psi_k) \right\} (\infty, k_j) + W(\phi_k, \frac{1}{b_j} \phi) (-\infty, k_j) \\ &\quad + 2 \frac{k_j}{b_j} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x, k_j) dx \\ &= \frac{b_j}{j} \left\{ W(\exp(ikx), ix \exp(ikx)) \right\} (\infty, k_j) + \frac{1}{b_j} \left\{ W(-ix \exp(ikx), \exp(-ikx)) \right\} (-\infty, k_j) + 2 \frac{k_j}{b_j} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x, k_j) dx \end{aligned}$$

los dos primeros sumandos del segundo miembro, son nulos

$$a'(k_j) = \frac{1}{ib_j} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x, k_j) dx = \frac{b_j}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x, k_j) dx$$

Luego:

$$a(k_j) = 0 \quad \text{y} \quad a'(k_j) = \frac{b_j}{id_j} \neq 0, \quad \text{Im}k_j > 0 \quad (\text{C-25})$$

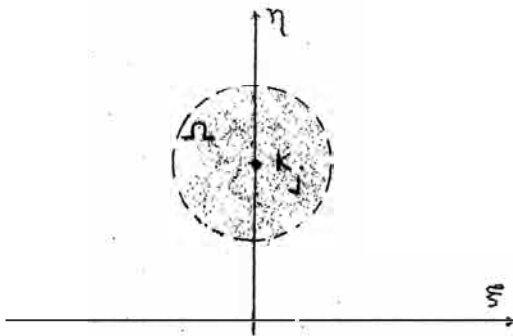
donde

$$d_j = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{k_j}^2(x) dx \right]^{-1} \quad \text{constante de normalización,}$$

$$\phi_{k_j} = b_j \psi_{k_j}$$

el resultado (C-21) nos indica que b_j y d_j son constantes reales.

o. Mostremos ahora que los polos son de primer orden



Como T tiene un polo en $k = k_j$ entonces, para cualquier $k \neq k_j$ que pertenezca a una vecindad Ω del k_j , ella puede expresarse en una serie de Laurent de la forma

$$T(k) = \frac{c_{-h}}{(k-k_j)^h} + \dots + \frac{c_{-1}}{(k-k_j)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (k-k_j)^n, \quad k \in \Omega \quad (\text{C-26})$$

donde

$c_{-h} \neq 0$; h indica el orden del polo ($h > 0$)

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{T(k)}{(k-k_j)^{n+1}} dk, \quad n = -h, -h+1, \dots, -1, 0, 1, 2,$$

siendo γ una circunferencia contenida en Ω y en cuyo interior se encuentra k_j

Asímismo, la serie de Laurent para la función analítica a , es de la forma

$$a(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (k-k_j)^n, \quad k \in \Omega \tag{C-27}$$

donde

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{a(k)}{(k-k_j)^{n+1}} dk = \frac{a^{(n)}(k_j)}{n!}$$

$a^{(n)}$ indica derivada de orden n

Como $a(k_j) = 0$, en (C-27) tenemos

$$a(k) = 0 + a'(k_j)(k-k_j) + \frac{1}{2!} a''(k_j)(k-k_j)^2 + \dots$$

$$= (k-k_j) \left[a'(k_j) + \frac{1}{2!} a''(k_j)(k-k_j) + \dots \right]$$

$$T(k) = \frac{1}{a(k)} \Rightarrow (k-k_j)T(k) = \frac{1}{a'(k_j) + \frac{1}{2} a''(k_j)(k-k_j) + \dots}$$

En (C-25) se indica que $a'(k_j) \neq 0$. Luego

$$\lim_{k \rightarrow k_j} (k-k_j) T(k) = \frac{1}{a'(k_j)} \neq 0 \quad (\text{C-28})$$

Este resultado será compatible con (C-26) sólo si $h = -1$

Por lo tanto:

Los polos de la función T son de primer orden.

ANEXO 1

Relaciones entre $a(k)$, $b(k)$ y $\bar{a}(k)$, $\bar{b}(k)$.-

En (C-4) y (C-7)

$$\Phi(x,k) = a(k)\bar{\Psi}(x,k) + b(k)\Psi(x,k) \quad (i)$$

$$\Psi(x,k) = \bar{a}(k)\bar{\Phi}(x,k) + \bar{b}(k)\Phi(x,k) \quad (ii)$$

El resultado (B. 30) indica que $\bar{\Phi}(x,k) = \Phi(x,-k)$, $\bar{\Psi}(x,k) = \Psi(x,-k)$, el cual aplicamos a las expresiones (i), (ii) luego de evaluarlas en $-k$ Obtenemos

$$\bar{\Phi}(x,k) = a(-k)\Psi(x,k) + b(-k)\bar{\Psi}(x,k) \quad (iii)$$

$$\bar{\Psi}(x,k) = \bar{a}(-k)\Phi(x,k) + \bar{b}(-k)\bar{\Phi}(x,k) \quad (iv)$$

Reemplazando (ii) y (iv) en (i) y teniendo en cuenta que ${}_k\Phi$, ${}_k\Psi$ son linealmente independientes ($k \neq 0$) resulta,

$$a(k)\bar{a}(-k) + b(k)\bar{b}(k) = 1$$

$$a(k)\bar{b}(-k) + b(k)\bar{a}(k) = 0 \quad (1)$$

En forma similar, reemplazando (i), (iii) en (ii) obtenemos

$$a(-k)\bar{a}(k) + b(k)\bar{b}(k) = 1$$

$$a(k)\bar{b}(k) + b(-k)\bar{a}(k) = 0 \quad (2)$$

También, para valores de k real, el resultado (B-30) nos indica

$$\phi^*(x, -k) = \phi(x, k); \quad \phi^*(x, -k) = \phi(x, k)$$

$$\psi^*(x, -k) = \bar{\psi}(x, k); \quad \psi^*(x, -k) = \psi(x, k)$$

resultados que aplicaremos en (i), (ii) luego de evaluarlas en $-k$ y tomar valores conjugados complejos. Resulta.

$$\phi(x, k) = a^*(-k)\bar{\psi}(x, k) + b^*(-k)\psi(x, k) \quad (v)$$

$$\psi(x, k) = a^*(-k)\phi(x, k) + b^*(-k)\phi(x, k) \quad (vi)$$

Comparando (i) con (v) y (ii) con (vi)

$$\begin{aligned} a(k) &= a^*(-k) & b(k) &= b^*(-k) \\ a(k) - \bar{a}^*(-k) & & b(k) &= b^*(-k) \end{aligned} \quad (3)$$

y así

$$\begin{aligned} T(k) &= T^*(-k) & R(k) &= R^*(-k) \\ T(k) &= \bar{T}^*(-k) & R(k) &= R^*(-k) \end{aligned}$$

Por otro lado, al comparar (C-5) con (C-8) (usando $\phi_k = -\phi_{-k}$, $\psi_k = -\psi_{-k}$) resulta

$$\begin{aligned} a(k) &= a(k) \quad ; \quad \text{así} \quad T(k) = T(k) \\ b(k) &= -b(-k) \end{aligned} \quad (4)$$

Reemplazando (4) en (1) y (2)

$$a(k)a(-k) - b(k)b(-k) = 1 \quad a(-k)a(k) - b(-k)b(k) = 1 \quad (5)$$

Reemplazando (C-12) en (-15)

$$a(k) a^*(k) - b(k) b^*(k) = 1 \quad \bar{a}^*(k) \bar{a}(k) - \bar{b}^*(k) \bar{b}(k) = 1$$

y así

(6)

$$|R(k)|^2 + |T(k)|^2 = 1 \quad |\bar{R}(k)|^2 + |\bar{T}(k)|^2 = 1$$

ANEXO 2

$$-\phi_{xx} + Q\phi = k^2\phi \quad (7)$$

$$-\psi_{xx} + Q\psi = k^2\psi \quad (8)$$

Derivando (7) con respecto a k , multiplicándola luego por ψ

$$-\phi_{xxk}\psi + Q\phi_k\psi = k^2\phi_k\psi + 2k\phi\psi$$

multiplicando (8) por ϕ_k

$$-\psi_{xx}\phi_k + Q\psi\phi_k = k^2\phi_k\psi$$

restando estas dos últimas expresiones

$$\psi_{xx}\phi_k - \phi_{xxk}\psi = 2k\phi\psi$$

$$\left\{ W(\phi_k, \psi) \right\}_x = 2k\phi\psi$$

Evaluamos estas funciones en (x, k_j) , y usando (C-17) resulta

$$\left\{ W(\phi_k, \Psi) \right\}_x (x, k_j) = \frac{2k_j}{b_j} \phi^2(x, k_j)$$

integrando desde $-\infty$ hasta ∞

$$\begin{aligned} \left\{ W(\phi_k, \Psi) \right\} (\infty, k_j) &= \left\{ W(\phi_k, \Psi) \right\} (-\infty, k_j) + \\ &+ \frac{2k_j}{b_j} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x, k_j) dx \end{aligned} \quad (9)$$

COMPLEMENTO D

EL PROBLEMA INVERSO; RECUPERACION DEL POTENCIAL A
PARTIR DE LOS PARAMETROS DE DISPERSION

1. Otra representación integral para las funciones de Jost Ψ, Φ . La función K y su relación con el potencial Q . -
 La función de Jost ${}_k\Psi$ está dada en forma implícita mediante una ecuación integral

$${}_k\Psi(x) = \exp(ikx) + \frac{1}{k} \int_x^\infty Q(v) \text{Sen } k(v-x) {}_k\Psi(v) dv \quad (D-1)$$

$$\text{Im}k \geq 0$$

Resulta conveniente (como veremos en D-4) buscar una forma más explícita para expresar ${}_k\Psi$. Por ejemplo, si se plantea

$${}_k\Psi(x) = \exp(ikx) + \int_x^\infty K(x,s) \exp(iks) ds, \quad \text{Im}k \geq 0 \quad (D-2)$$

nos preguntaremos cómo debe ser K para que ${}_k\Psi$ satisfaga (D-1). Nótese, en (D-2), que solo pueden determinarse los valores $K(x, y)$ para los cuales $y \geq x$.

El reemplazar (D-2) en (D-1) nos ha de conducir, luego de algunos procedimientos algebraicos que mostramos en el anexo 1 al final de este complemento (Ver D-33), a la siguiente ecuación integral para la función K :

$$\begin{aligned}
 K(x, y) = & \frac{1}{2} \int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} Q(v) \left[1 + \int_v^{y+(v-x)} K(v, u) du \right] dv + \\
 & + \frac{1}{2} \int_x^{\frac{x+y}{2}} \int_{y-(v-x)}^{y+(v-x)} Q(v) K(v, u) du dv \dots \text{ para } y \geq x
 \end{aligned}
 \tag{D-3}$$

Esta ecuación, de apariencia complicada, nos proporciona una relación interesante entre la función K y el potencial. En efecto, evaluando (D-3) en $x = y$ obtenemos

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^{\infty} Q(v) dv$$

y así

$$Q(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}
 \tag{D-4}$$

En forma similar se procede con la función ϕ_k , para la cual se introduce una nueva función $K_- = K_-(x, y)$. Se obtiene (ver ref.1, págs 173 - 174)

$$\begin{aligned}
 \phi_k(x) = & \exp(-ikx) - \frac{1}{k} \int_{-\infty}^x Q(v) \text{Sen}K(v-s) \phi_k(v) dv \\
 \phi_k(x) = & \exp(-ikx) + \int_{-\infty}^x K_-(x, y) \exp(-iky) dy
 \end{aligned}
 \tag{D-5}$$

$$Q(x) = 2 \frac{d}{dx} K_-(x, x)$$

2. Propiedades de la función K

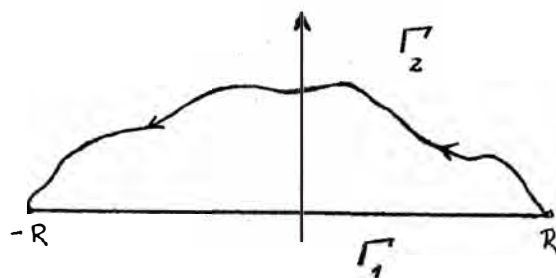
Intentaremos despejar, en (D-2), el valor $K(x,y)$ en términos de Ψ . Justifiquemos primero el resultado (D-6).

Para ello, con x fijo, definamos

$$A(k) = \Psi(x,k) - \exp(ikx)$$

se cumple que

$$\int_{\Gamma_R} A(k) \exp(-iyk) dk = 0, \quad y \in \mathbb{R}$$



($\Gamma_R = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, es una curva cerrada como se indica en la fig)

pues la función subintegral es analítica en el semiplano $\text{Im}k > 0$.

Cuando $R \longrightarrow \infty$ tendremos

$$\int_{\mathcal{L}} A(k) \exp(-iyk) dk = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp(-iyk) dk$$

$$\int_{\mathcal{L}} [\Psi(x,k) - \exp(ikx)] \exp(-iyk) dk = \int_{-\infty}^{\infty} [\Psi(x,k) - \exp(ikx)] \exp(-iyk) dk \quad (D-6)$$

\mathcal{L} es una curva orientada en sentido contrario a Γ_2

Reemplazando (D-2) en (D-6)

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\Psi(x,k) - \exp(ikx)] \exp(-iyk) dk =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_x^{\infty} K(x,s) \exp(iks) ds \right] \exp(-iyk) dk$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_x^\infty K(x,y) \int_{-\infty}^\infty \exp(ik(s-y)) dk ds = \\
 &= \int_x^\infty K(x,s) 2\pi \delta(s-y) ds = \begin{cases} 2\pi K(x,y) & y > x \\ 0 & \dots\dots y < x \end{cases} \\
 & \hspace{20em} (D-7)
 \end{aligned}$$

Los valores $K(x,y)$ que toma la función K son reales.-

En (D-7), para valores de $y \geq x$ se tiene

$$\begin{aligned}
 K(x,y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty [\Psi(x,k) - \exp(ikx)] \exp(-iyk) dk \\
 K^*(x,y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty [\Psi^*(x,k) - e^{-ikx}] e^{iyk} dk
 \end{aligned}$$

Usando (B-30): $\Psi(x,k) = \Psi(x, -k^*)$. Para k real se cumple $\Psi^*(x,k) = \Psi(x, -k)$

$$K^*(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty [\Psi(x, -k) - \exp(-ikx)] \exp(iyk) dk$$

cambio de variable $k = -\alpha$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} [\Psi(x, \alpha) - \exp(i\alpha x)] \exp(-iy\alpha) (-d\alpha) = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty [\Psi(x, \alpha) - \exp(i\alpha x)] \exp(-iy\alpha) d\alpha
 \end{aligned}$$

$$K(x,y) = K(x,y) \hspace{15em} (D-8)$$

Se procede en forma similar con K_- , se obtiene

$$K_-(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi(x,k) - e^{-ikx}) e^{iyk} dk, \quad (D-9)$$

$$K_-^*(x,y) = K_-(x,y)$$

para $y < x$

3. La Ec. de Marchenko

La ecuación para $K = K(x,y)$ obtenida en (D-3) fue establecida en base a un proceso analítico que buscaba compatibilidad entre lo que expresaban (D-1) y (D-2).

Lo que se pretende ahora es obtener una ecuación para $K = K(x,y)$ pero que tome como base el proceso de dispersión esquematizado en la fig. 1 intentado así relacionarla con los parámetros de dispersión $T(k)$ y $R(k)$.

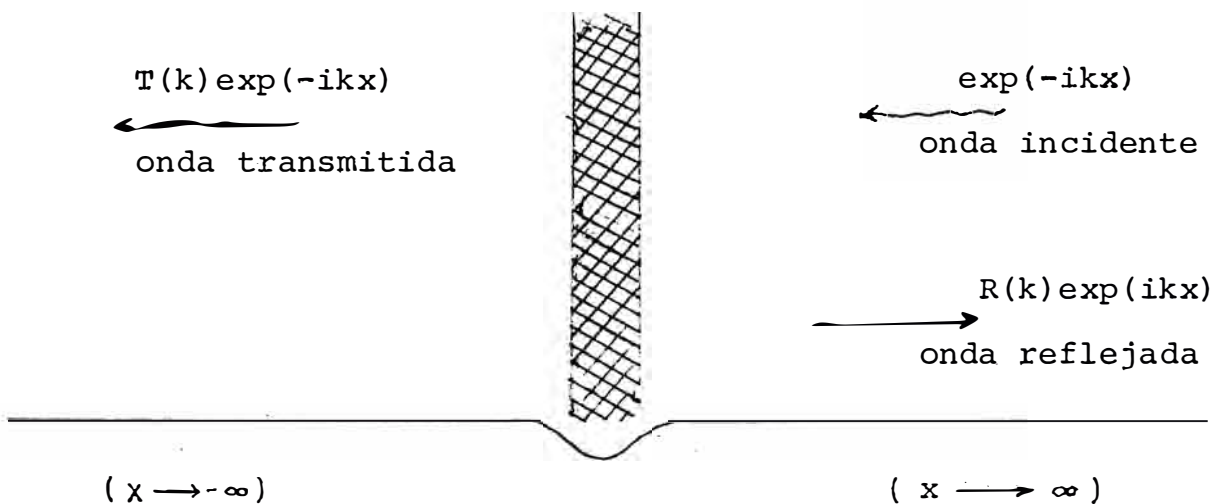


Fig. 1 En este esquema se está considerando k real y positivo

La expresión (C-6) indica

$$T(k) \Phi(x,k) = \bar{\Psi}(x,k) + R(k) \Psi(x,k)$$

Para k real $\bar{\Psi}(x,k) = \Psi^*(x,k)$ (Ver B-30). Luego

$$T(k) \Phi(x,k) = \Psi^*(x,k) + R(k) \Psi(x,k), \quad k \text{ real} \quad (D-10)$$

Esta relación es nuestro punto de partida para obtener una ecuación para K (Nótese que ella interpreta el fenómeno de dispersión de la Fig. 2). El primer paso consiste en expresar cada uno de los sumandos en términos de K .

Las relaciones entre las funciones de Jost Ψ , Φ y las funciones K y K_* es a través de (D-2) y (D-5). Dichas expresiones sugieren reacomodar los sumandos en (D-10) en forma tal que aparezcan los factores $[\Psi(x,k) - \exp(ikx)]$ y $[\Phi(x,k) - \exp(-ikx)]$. El resultado es

$$(T(k)-1) \Phi(x,k) = [\Psi(x,k) - \exp(ikx)]^* + R(k) [\Psi(x,k) - \exp(ikx)] + R(k) \exp(ikx) - [\Phi(x,k) - \exp(-ikx)] \quad (D-11)$$

Ahora, mantenemos fijo el valor de "x" y consideramos a cada uno de los sumandos como funciones de k (k real) a las cuales aplicaremos el operador de Fourier \mathcal{F}

$$\circ \text{ Sea } A_1(k) = [\Psi(x,k) - \exp(ikx)]^* \quad (D-12a)$$

$$A_1(k) = \left[\int_x^\infty K(x,s) \exp(iks) ds \right] = \int_x^\infty K(x,s) \exp(-iks) ds$$

$$\begin{aligned} \{ \mathcal{F}(A_1) \} (y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A_1(k) \exp(iky) dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_x^\infty K(x,s) \exp(-iks) ds \exp(iky) dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_x^\infty K(x,s) \exp(i(y-s)k) ds dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty K(x,s) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i(y-s)k) dk ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty K(x,s) 2\pi \delta(y-s) ds = \\ &= \begin{cases} \sqrt{2\pi} K(x,y) & \text{si } y > x \\ 0 & \text{si } y < x \end{cases} \end{aligned} \tag{D-12b}$$

• sea $A_2(k) = R(k) [\Psi(x,k) - \exp(ikx)]$ (D-13a)

$$A_2(k) = R(k) \int_x^\infty K(x,s) \exp(iks) ds$$

$$\begin{aligned} \{ \mathcal{F}(A_2) \} (y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R(k) \int_x^\infty K(x,s) \exp(iks) ds \exp(iyk) dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_x^\infty K(x,s) \int_{-\infty}^{\infty} R(k) \exp i(y+s)k dk ds \\ &= \int_x^\infty K(x,s) \{ \mathcal{F}(R) \} (y+s) ds \end{aligned} \tag{D-13b}$$

• Sea $A_3(k) = R(k) \exp(ikx)$

$$\{F(A_3)\} (y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R(k) \exp(ikx) \exp(iky) dk = \{F(R)\} (x+y) \quad (D-14)b)$$

o. Sea $A_4(k) = \Phi(x, k) - \exp(-ikx)$ (D-15a)

$$A_4(k) = \int_{-\infty}^x K_-(x, s) \exp(-iks) ds$$

$$\begin{aligned} \{F(A_4)\} (y) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x K_-(x, s) \exp(-iks) ds \exp(iyk) dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x K_-(x, s) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i(y-s)k) dk ds \\ &= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^x K_-(x, s) \delta(y-s) ds = \sqrt{2\pi} \int_{y-x}^{\infty} K_-(x, y-s') \delta(s') ds' \end{aligned}$$

$$\{F(A_4)\} (k) = \begin{cases} 0 & \text{si, } y-x > 0 \\ \sqrt{2\pi} K_-(x, y) & \text{si, } y-x < 0 \end{cases} \quad (D-15b)$$

Con los resultados precedentes, de la expresión (D-11) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (T(k)-1) \Phi(x, k) \exp(iyk) dk &= \sqrt{2\pi} K_-(x, y) + \int_x^{\infty} K(x, s) \{F(R)\} (y+s) ds + \\ &+ \{F(R)\} (x+y) \quad \dots \text{ para } y < x \end{aligned} \quad (D-16)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (T(k)-1) \phi(x,k) \exp(iyk) dk = \sqrt{2\pi} K(x,y) + \int_x^{\infty} K(x,s) \{F(R)\}(y+s) ds +$$

$$+ \{F(R)\}(x+y) \quad \dots \text{ para } y > x$$

(D-17)

Como en (D-16) se tienen dos incógnitas K y K_- , mientras que en (D-17) sólo a la función K , optamos por continuar a nalizando esta última.

El procedimiento para evaluar la integral del primer miembro de la igualdad (D-17) lo indicaremos en el anexo 2 al final de este complemento. El resultado es el siguiente (Ver D-38).

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (T(k)-1) \phi(x,k) \exp(iyk) dk = -\sqrt{2\pi} \sum_{j=1}^N d_j \exp ik_j(x+y) +$$

$$- \sqrt{2\pi} \int_x^{\infty} K(x,s) \sum_{j=1}^N d_j \exp [ik_j(y+s)] ds \quad , \text{ para } y > x$$

(D-18)

donde k_j , $j = 1, 2, \dots, N$, son los polos de la función $T(k) = 1/a(k)$. (Ver C-19 y C-28)

Reemplazando (D-18) en (D-17), obtenemos

$$\left[\sum_{j=1}^N d_j \exp [ik_j(x+y)] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \{F(R)\}(x+y) \right] + K(x,y) +$$

$$+ \int_x^{\infty} K(x,s) \left[\sum_{j=1}^N d_j \exp [ik_j(y+s)] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \{F(R)\}(y+s) \right] ds = 0$$

Con la siguiente definición

$$\Omega(u) \equiv \sum_{j=1}^N d_j \exp(ik_j u) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \{ \tilde{F}(R) \} (u) \quad (D-19)$$

$$\text{donde } \{ \tilde{F}(R) \} (u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R(k) \exp(iyk) dk$$

la expresión anterior toma la forma

$$\Omega(x+y) + K(x,y) + \int_x^{\infty} K(x,s) \Omega(y+s) ds = 0 \quad \dots \quad y > x \quad (D-20)$$

Esta ecuación es denominada ECUACION DE MARCHENKO

ANEXO 1

Reemplazando (D-2) en (D-1), obtenemos

$$\int_x^\infty K(x,y) \exp(iky) dy = \int_x^\infty Q(v) \left[\frac{\text{Sen}k(v-x)}{k} \exp(ikv) \right] dv +$$

$$+ \int_x^\infty Q(v) \int_v^\infty \left[\frac{\text{Sen}k(v-x)}{k} \exp(iku) \right] K(v,u) du dv \quad (D-21)$$

Usando las dos siguientes igualdades

$$\int_x^{2v-x} \exp(iks) ds = \frac{1}{ik} \left[\exp ik(2v-x) - \exp ikx \right]$$

$$= \frac{\exp ikv}{ik} \left[\exp ik(v-x) - \exp -ik(v-x) \right] = 2 \exp(ikv) \frac{\text{Sen}k(v-x)}{k}$$

$$\int_{u-(v-x)}^{u+(v-x)} \exp(iks) ds = \frac{1}{ik} \exp(iku) \left[\exp ik(v-x) - \exp -ik(v-x) \right] =$$

$$= 2 \exp iku \frac{\text{Sen}k(v-x)}{k}$$

la expresión (D-21) toma la forma

$$\int_x^\infty K(x,y) \exp(iky) dy = \frac{1}{2} \int_x^\infty Q(v) \left[\int_x^{2v-x} \exp(iks) ds \right] dv$$

$$+ \frac{1}{2} \int_x^\infty Q(v) \int_v^\infty \left[\int_{u-(v-x)}^{u+(v-x)} \exp(iks) ds \right] K(v,u) du dv$$

$$\int_x^\infty K(x,y) e^{iky} dy = \int_x^\infty \int_x^{2v-x} \left(\frac{1}{2} Q(v) e^{iks} \right) ds dv +$$

$$+ \int_x^\infty \int_v^\infty \int_{u-(v-x)}^{u+(v-x)} \left[\frac{1}{2} Q(v) \exp(iks) K(v,u) \right] ds du dv$$

(D-22)

Los sumandos que aparecen en el segundo miembro de (D-22) los identificaremos con A y B respectivamente.

En A intercambiamos el orden de integración (justificación gráfica en la fig. 2)

$$A = \int_x^\infty \int_x^{2v-x} \left[\frac{1}{2} Q(v) \exp(iks) \right] ds dv = \int_x^\infty \int_{\frac{x+s}{2}}^\infty \left[\frac{1}{2} Q(v) \exp(iks) \right] dv ds$$

(D-23)

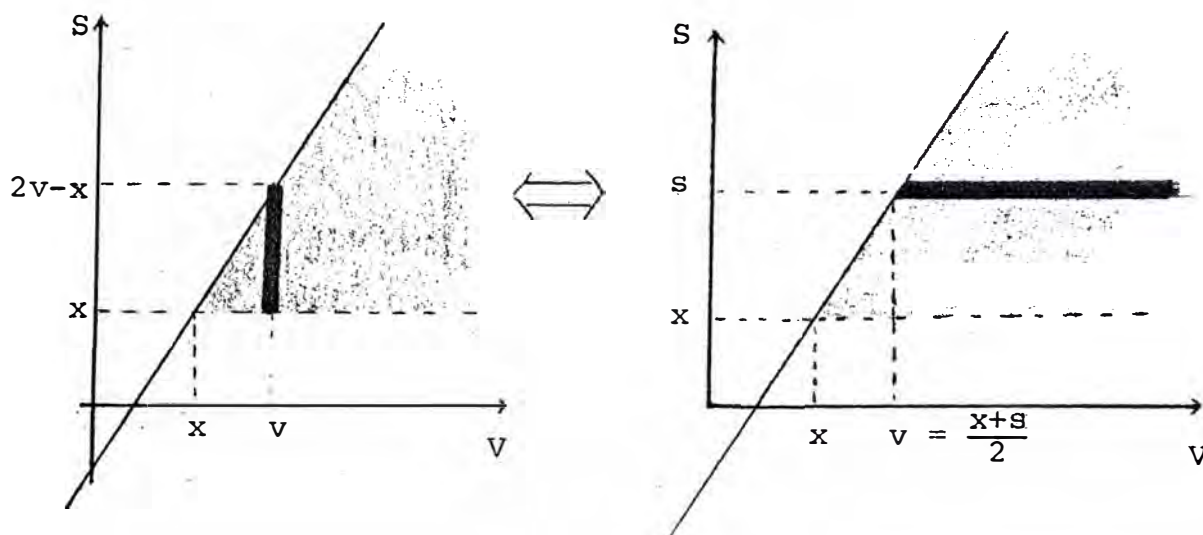
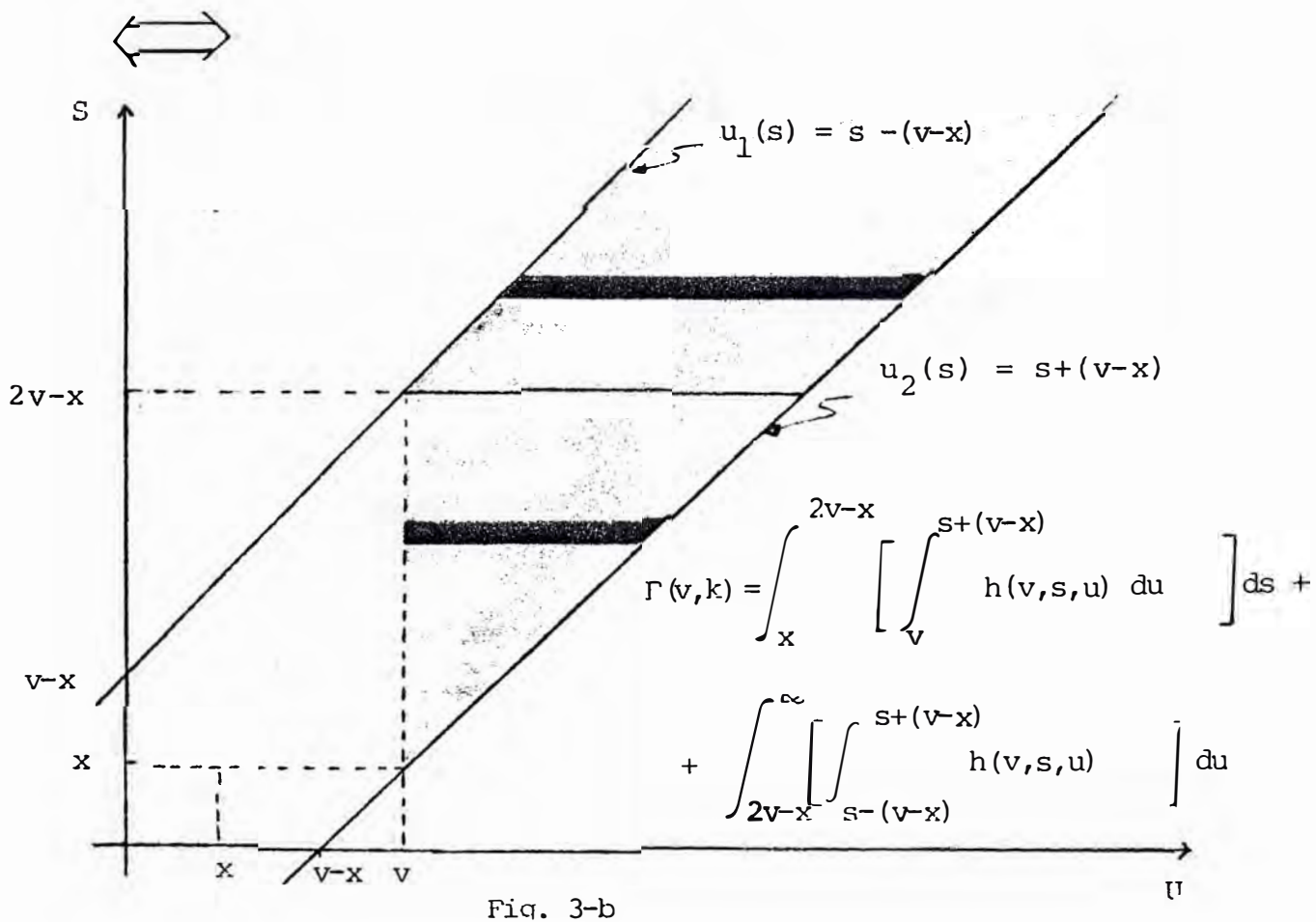
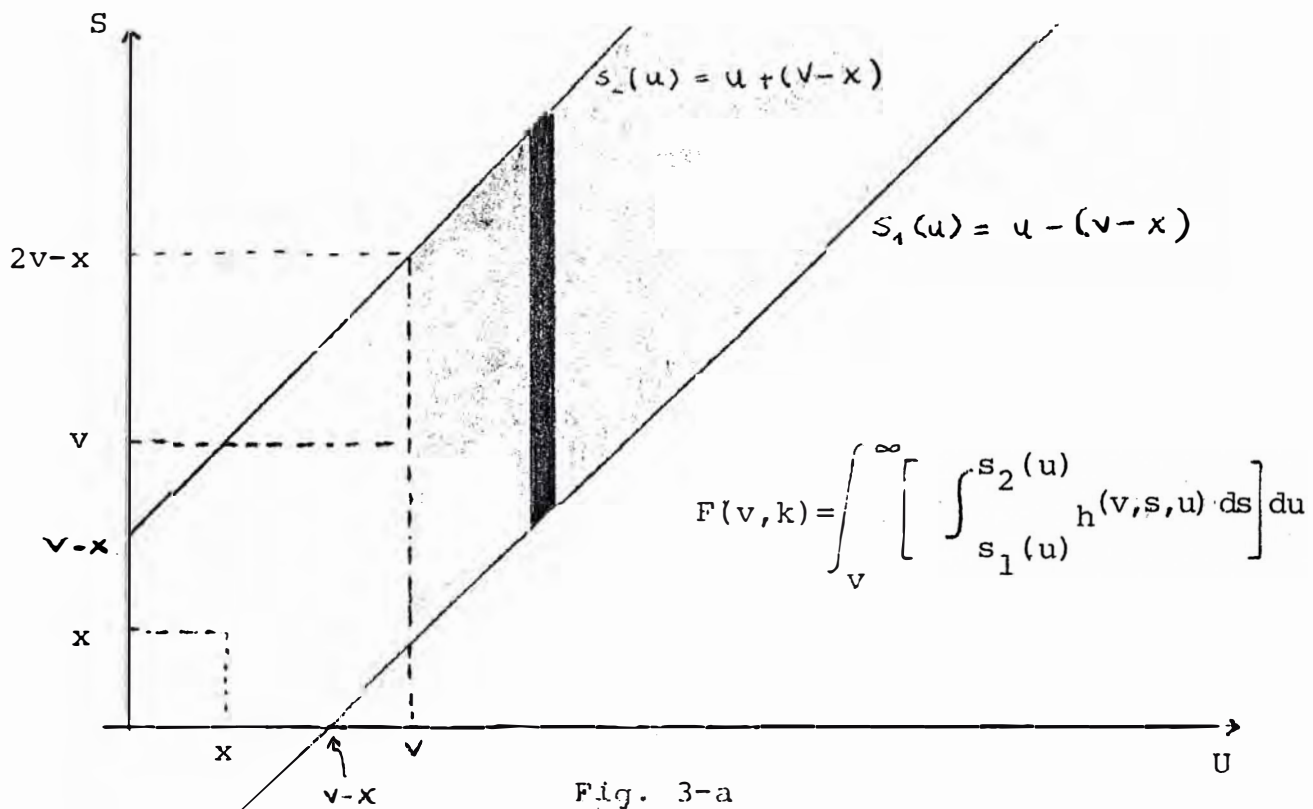


Fig. 2



o. Expresamos B en la forma siguiente

$$B = \int_x^\infty F(v, k) dv \quad (\text{nótese } v \gg x) \quad (D-24)$$

donde

$$F(v, k) = \int_v^\infty \int_{u-(v-x)}^{u+(v-x)} \left[\frac{1}{2} Q(v) \exp(iks) K(v, u) \right] ds du \quad (v \text{ fijo}) \quad (D-25)$$

El orden de integración indicado en (D-25) es mostrado en la fig 3a. En la fig. 3b se indica cómo podemos intercambiar dicho orden y obtener

$$F(v, k) = \int_x^{2v-x} \left[\int_v^{s+(v-x)} h(v, s, u) du \right] ds + \int_{2v-x}^\infty \left[\int_{s-(u-x)}^{s+(u-x)} h(v, s, u) du \right] ds \quad (D-26)$$

donde $h(v, s, u) = \frac{1}{2} Q(v) \exp(iks) K(v, u)$

$$\text{Con } f(v, s) = \int_v^{s+(v-x)} h(v, s, u) du; \quad g(v, s) = \int_{s-(v-x)}^{s+(v-x)} h(v, s, u) du \quad (D-27)$$

(D-6) puede expresarse como

$$F(v, k) = \int_x^{2v-x} f(v, s) ds + \int_{2v-x}^\infty g(v, s) ds \quad (D-28)$$

Luego en D-25 tenemos

$$B = \int_x^\infty F(v,k) dv = \int_x^\infty \int_x^{2v-x} f(v,s) ds dv + \int_x^\infty \int_{2v-x}^\infty g(v,s) ds dv \quad (D-29)$$

Nuevamente se desea intercambiar el orden de integración

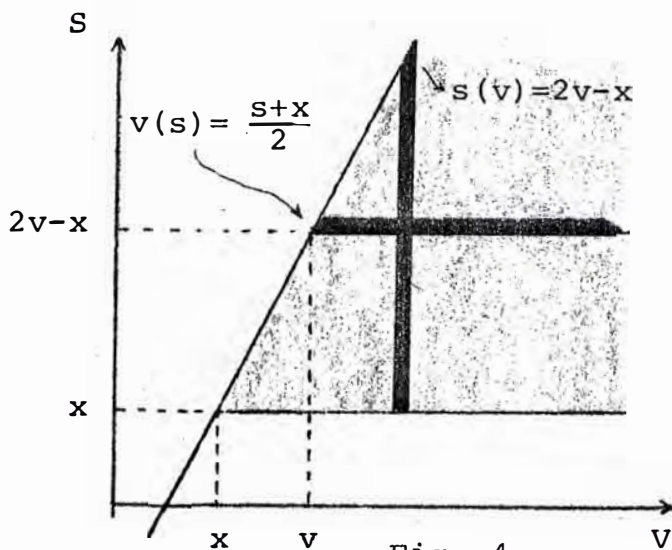


Fig. 4

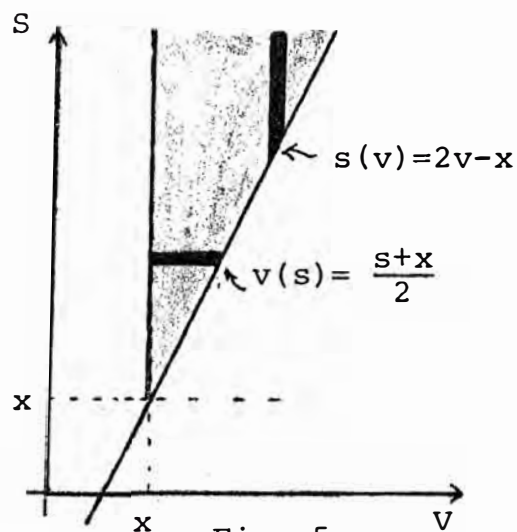


Fig. 5

$$\int_x^\infty \int_x^{2v-x} f(v,s) ds dv =$$

$$\int_x^\infty \int_{2v-x}^\infty g(v,s) ds dv =$$

$$= \int_x^\infty \int_{\frac{s+x}{2}}^\infty f(v,s) dv ds$$

$$= \int_x^\infty \int_x^{\frac{s+x}{2}} g(v,s) dv ds$$

$$B = \int_x^\infty F(v,k) dv = \int_x^\infty \int_{\frac{s+x}{2}}^\infty f(v,s) dv ds + \int_x^\infty \int_x^{\frac{s+x}{2}} g(v,s) dv ds$$

Reemplazamos los valores de f y g dados en (D-28)

$$B = \int_x^\infty \int_{\frac{s+x}{2}}^\infty h(v,s,u) dv ds + \int_x^\infty \int_x^{\frac{s+x}{2}} h(v,s,u) dv ds$$

$$B = \int_x^\infty \left[\int_{\frac{s+x}{2}}^\infty \int_v^{s+(v-x)} h(v,s,u) du dv + \int_x^{\frac{s+x}{2}} \int_{s-(v-x)}^{s+(v-x)} h(v,s,u) du dv \right] ds \quad (D-30)$$

donde $h(v,s,u) = \frac{1}{2} Q(v) \exp(iks) K(v,u)$

Reemplazamos (D-23) y (D-30) en (D-22)

$$\int_x^\infty K(x,s) e^{iks} ds = \int_x^\infty \left[\int_{\frac{x+s}{2}}^\infty \frac{1}{2} Q(v) dv \right] \exp(iks) ds + \int_x^\infty \left[\int_{\frac{x+s}{2}}^\infty \int_v^{s+(v-x)} \frac{1}{2} Q(v) K(v,u) du dv + \int_x^{\frac{x+s}{2}} \int_{s-(v-x)}^{s+(v-x)} \frac{1}{2} Q(v) K(v,u) du dv \right] e^{iks} ds \quad (D-31)$$

Recordando que hemos empezado con un valor fijo de x , definimos

$${}_x H(s) = \begin{cases} K(x,s) - \int_{\frac{x+s}{2}}^\infty \frac{1}{2} Q(v) dv - \int_{\frac{x+s}{2}}^\infty \int_v^{s+(v-x)} \frac{1}{2} Q(v) k(v,u) du dv + \\ - \int_x^{\frac{x+s}{2}} \int_{s-(v-x)}^{s+(v-x)} \frac{1}{2} Q(v) K(v,u) du dv \quad \dots \text{ para } s \geq x \\ 0 \quad \dots \text{ para } s < x \end{cases} \quad (D-32)$$

La expresión (D-31) indica

$$\int_{-\infty}^{\infty} {}_x H(s) e^{iks} ds = 0$$

la cual es válida para todo k con $\text{Im}k \geq 0$, pues en el proceso llevado a cabo para establecerla no ha sido necesario hacer restricciones k . En particular será también válida para k real; entonces considerando condiciones de unicidad para la transformada de Fourier (Ver Ref. 25 pág.469), este resultado indica que ${}_x H = 0$, si a la vez exigimos continuidad de ${}_x H$. O sea que en (D-32) tendremos:

$$K(x,s) = \frac{1}{2} \int_{\frac{x+s}{2}}^{\infty} Q(v) \left[1 + \int_v^{s+(v-x)} K(v,u) du \right] dv + \frac{1}{2} \int_x^{\frac{x+s}{2}} \int_{s-(v-x)}^{s+(v-x)} Q(v) K(v,u) du dv$$

para $s \geq x$ (D-33)

ANEXO 2

La integral del primer miembro de la igualdad (D-17) debe ser evaluada a lo largo del eje k real, y para ello aplicaremos la técnica usual de trabajar en el plano complejo. Partimos de la siguiente relación.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Gamma_R} (T(k) - 1) \Phi(x, k) \exp(iyk) dk \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (T(k) - 1) \Phi(x, k) \exp(iyk) dk \quad (D-34)$$

$$+ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} (T(k) - 1) \Phi(x, k) \exp(iyk) dk \quad (D-34)$$

donde

Γ_R y C_R están especificados en la fig. 5 del Cap. 1

Según (C-19) $\lim_{|k| \rightarrow \infty} |T(k) - 1| = 0$. Asimismo, de acuerdo a

(B-27) $\Phi(x, k) \exp(iyk) \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} \exp i(y-x)k$ y, como

$\text{Im}k > 0$, se cumplirá $\exp\{i(y-x)k\} \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} 0$ para $(y-x) > 0$

Luego

$$\int_{C_R} (T(k) - 1) \Phi(x, k) \exp(iyk) dk \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \text{ para } y > x \quad (D-35)$$

En (D-34) se cumplirá, entonces, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (T(k)-1) \phi(x,k) \exp(iyk) dk = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_R} (T(k)-1) \phi(x,k) \exp(iyk) dk =$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_R} T(k) \phi(x,k) \exp(iyk) dk + \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_R} \phi(x,k) \exp(iyk) dk$$

Como ϕ es analítica en $\text{Im}k > 0$ y continua en $\text{Im}k \gg 0$

la última integral es igual a cero. Así

$$\oint_{\Gamma_R} (T(k)-1) \phi(x,k) \exp(iyk) dk = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_R} T(k) \phi(x,k) \exp(iyk) dk \quad (D-36)$$

De acuerdo a (C-19), la función $T(k)=1/a(k)$ tiene un número finito N de polos en $k = k_j \quad j = 1, 2, \dots, N$. Luego

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_R} T(k) \phi(x,k) \exp(iyk) dk =$$

$$= 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res} (T(k) \phi(x,k) \exp(iyk); k_j)$$

basándonos en que los polos son de primer orden (ver C-28) resulta,

$$= 2\pi i \sum_{j=1}^N \lim_{k \rightarrow k_j} \left\{ (k-k_j) T(k) \phi(x,k) \exp(iyk) \right\}$$

$$= 2\pi i \sum_{j=1}^N \left[\lim_{k \rightarrow k_j} (k-k_j) T(k) \right] \phi(x, k_j) \exp(iyk_j)$$

usando (C-28)

$$= 2\pi i \sum_{j=1}^N \frac{\Phi(x, k_j) \exp(iyk_j)}{a'(k_j)}$$

usando (C-25)

$$= -2\pi i \sum_{j=1}^N d_j \Phi(x, k_j) \exp(iyk_j)$$

usando (D-2) para evaluar $\Phi(x, k_j)$

$$= -2\pi i \sum_{j=1}^N \left\{ d_j \exp ik_j(x+y) + \int_x^\infty K(x, s) d_j \exp ik_j(y+s) ds \right\} \quad (D-37)$$

Reemplazando (D-37) en (D-36)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbb{T}(k) - 1) \Phi(x, k) \exp(iyk) dk &= \\ &= -2\pi \sum_{j=1}^N d_j \exp [ik_j(x+y)] + \quad (D-38) \\ &\quad -2\pi \int_x^\infty K(x, s) \sum_{j=1}^N d_j \exp [ik_j(y+s)] ds \end{aligned}$$

REFERENCIAS

1. R.K. Dodd, J.C. Eilbeck, J.D. Gibbon, H.C. Morris; Solitons and Nonlinear Wave Equations, Academic Press, 1982.
2. G.L. Lamb Jr., Elements of Soliton Theory; Pure and Applied Mathematics: a Wiley interscience series of text, monographs and tracts, 1980.
3. Alan C. Newell, Solitons in Mathematics and Physics , Program in Applied Mathematics; University of Arizona, Tucson, A2 85721 (Pre-impression, 1983).
4. P.L. Bhatnagar, Nonlinear Waves in one-dimensional dispersive Systems, Clarendon Press, Oxford, 1979.
5. G.B. Whitham F.R.S., Linear and Nonlinear Waves, A Wiley-Interscience Publication John Wiley and Sons , 1974.
6. N.J. Zabusky and M.D. Kruskal, Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, Phys. Rev. Lett., 15 , 1965, pp. 240-243.
7. Clifford S. Gardner, John M. Greene, Martin D. Kruskal and Robert M. Miura; Method for Solving the Korteweg de Vries equation; Phys. Rev. Lett. 19 , 1967, pp. 1095 - 1097.
8. Peter D. Lax, Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and solitary waves, Comm. Pure Applied Math. Vol XXI, 1968, pp. 467-490.
9. Robert M. Miura, Korteweg-de Vries Equation and Generalization I.A. remarkable explicit nonlinear transformation Journal of Math Phys. 9 , 1968, pp. 1202-1204.
10. Robert M. Miura, Clifford S. Gardner and Martin D. Kruskal, Korteweg-de Vries equation and generalizations II, Existence of conservation laws and constants of motion, Journal Math. Phys 9, 1968, pp. 1204-1209.
11. C.H. Su and C.S. Gardner, Korteweg-de Vries equation and generalization III. Derivation of the Korteweg-de Vries equation and Burgers equation, Journal Math Phys. 10 , 1969, pp. 536-539.

12. Clifford S. Gardner, Korteweg-de Vries equation and generalization IV. The Korteweg-de Vries equation as a hamiltonian system, Journal Math Phys 12, 1971, pp. 1548-1551.
13. Martin D. Kruskal, Robert M. Miura and Clifford S. Gardner, Korteweg-de Vries equation and generalization V. Uniqueness and nonexistence of polynomial conservation laws, Journal Math Phys., 11, 1970, pp. 952-960.
14. Clifford S. Gardner, John M. Greene, Martin D. Kruskal, Korteweg-de Vries equation and generalization VI. Method for exact solution, comm Pure Appl. Math 27, 1974, pp. 97-133.
15. V.E. Zakharov and A.B. Shabat, Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media, Soviet Physics JETP 34, 1972, pp. 62-69.
16. Alwyn C. Scott, F. Y. F. Chu, and David W. Mc Laughlin; the soliton: a new concept in applied science; proceedings of the IEEE, 61, 1973, pp. 1443-1483.
17. H. Flaschka, The Toda lattice II. Existence of integrals physical Review, B 9, 1974, pp. 1924-1925.
18. M. Henon, Integrals of the Toda lattice, Physical Review B, 9, 1974, pp. 1921-1923.
19. A.R. Bishop, J.A. Krumhansl, S.E. Trullinger; Solitons in condensed matter: a paradigm; Physica 1D, 1980, pp. 1-44.
20. P. Deift, F. Lund, and E. Trubowitz; Nonlinear wave equations and Constrained Harmonic Motion; Commun, Math Phys. 74 (1980),pp. 141-188.
21. Norman J. Zabusky, computational synergetics, physics Today/July 1984, pp. 36-46.
22. Mitchell J. Feigenbaum, Universal Behavior in Nonlinear Systems, Los Alamos Science/Summer 1980, pp. 4-27.
23. Predrag Cvitanovic, Universality in chaos (or, Feigenbaum for cyclists), Nordita - 83/39 (September 1983). (Lectures given at the XXII Cracow School of theoretical Physics, Zakopane, June 1982. Submitted to the Acta Physica Polonica).